Croissance économique

Murat Yildizoglu
Université Montesquieu Bordeaux IV - FRANCE

Table des matières

1 Problématiques de la croissance **4**
1.1 Une brève histoire de la croissance 4
1.2 Faits stylisés de la croissance 6
1.3 Les théories modernes de la croissance 7

2 Le modèle de Solow **10**
2.1 Le modèle de base 10
2.1.1 Le diagramme de Solow 12
2.1.2 Statiques comparatives 13
2.1.3 Propriétés de l'état stationnaire 14
2.1.4 Croissance économique dans le modèle simple 15
2.2 Technologie dans le modèle de Solow 15
2.3 Le paradoxe de la productivité 17

3 Applications empiriques des modèles néo-classiques **19**
3.1 Le modèle de Solow avec capital humain 19
3.2 Convergence et diversité des taux de croissance 23

4 Économie des idées **28**
4.1 Qu'est-ce que la technologie ? 28
4.2 Les idées en tant que bien 28
4.3 Droits de propriété intellectuelle, la révolution industrielle et la croissance 30
4.4 Idées et statistiques 30

5 Le moteur de la croissance **32**
5.1 Éléments de base du modèle 32
5.1.1 Croissance dans le modèle de Romer 33
5.1.2 Statiques comparative 35
5.2 Mécanismes économiques du modèle 36
5.2.1 Secteur du bien final 36
5.2.2 Secteur du bien intermédiaire 37
5.2.3 Secteur de la recherche 38
5.2.4 Résoudre le modèle 39
5.3 Niveau optimal de R&D 40

6 Croissance et développement **42**
6.1 Modèle de base 42
6.2 L'analyse du SCE 43

6.3 Comprendre les différences . . . 44

7 Infrastructure et performance économique de long terme 46
7.1 Un problème d'investissement . . . 46
7.2 Déterminants de F et de Π . . . 46

8 Théories alternatives de croissance endogène 48
8.1 Le modèle "AK" . . . 48
8.2 Intuition et autres modèles de croissance . . . 50
8.3 Externalités et les modèles AK . . . 51
8.4 Évaluation des modèles de croissance endogène . . . 52

9 Comprendre la croissance 54
9.1 Pourquoi certains sont riches et d'autres pauvres ? . . . 54
9.2 Quel est le moteur de la croissance ? . . . 55
9.3 Comprendre les miracles de la croissance . . . 55
9.4 Conclusion . . . 55

A Compléments sur le modèle de Solow 56
A.1 La fonction de production néo-classique . . . 56
A.2 La règle d'or de l'accumulation du capital . . . 57
A.3 Dynamiques de transition . . . 60
A.4 Modèles de croissance avec "trappe à la pauvreté" . . . 63

B Le modèle keynésien de Harrod (1939) 65
B.1 Équilibre du marché du bien . . . 65
B.2 Équilibre du marché du travail . . . 66
B.3 Le second problème de Harrod . . . 67

C Réponse post-keynésienne 69
C.1 Répartition et équilibre . . . 69
C.2 Statique comparative . . . 71
C.2.1 Consensus social . . . 71
C.2.2 "La cruche de la veuve" . . . 72
C.3 L'équilibre dynamique . . . 73

D Modèle de Ramsey. Arbitrage consommation–épargne 74
D.1 Le problème de Ramsey(1928) . . . 74
D.2 Consommation optimale . . . 75
D.3 Maximum de Pontryagin . . . 75
D.4 Règle de Keynes–Ramsey . . . 77
D.5 La condition de transversalité . . . 78
D.6 SCE et dynamiques . . . 79
D.6.1 La règle d'or modifiée . . . 79
D.6.2 Dynamiques . . . 80
D.7 Économie décentralisée . . . 82
D.7.1 Condition de Non-Ponzi . . . 84
D.7.2 Équilibre décentralisé . . . 84
D.7.3 Le rôle des anticipations . . . 85

D.8 Comportement local autour du sentier d'équilibre 85

Chapitre 1

Problématiques de la croissance

"Retrouver la croissance !"→Comprendre les sources de la croissance.
Comment remédier à la baisse durable de la croissance dans les pays industrialisés ?
A quoi correspondent les taux de croissance d'aujourd'hui ?

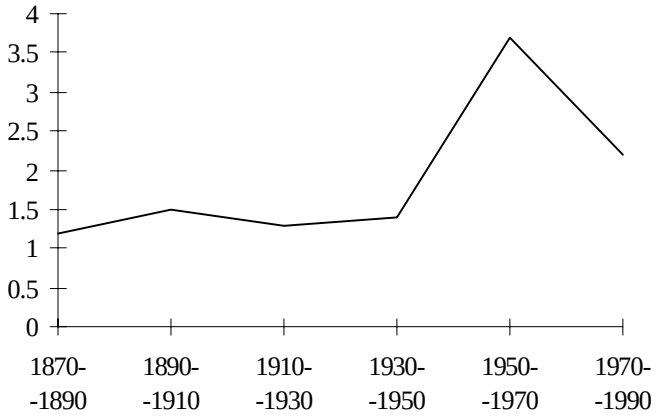
1.1 Une brève histoire de la croissance

Croissance : un phénomène récent ?

(Taux de croissance annuel moyen)	PIB	Population	PIB/tête
Période agraire : 500-1500	0	0	0
Période agraire progressive : 1500-1700	0.3	0.2	0.1
Capitalisme commercial : 1700-1820	0.6	0.4	0.2
Capitalisme : 1820-1980	2.5	0.9	1.6

TAB. 1.1: Croissance dans les pays européens(Maddison (1981))

Des taux significativement non-nuls ne s'observent que depuis deux siècles.
Deux siècles correspondent à une période courte dans l'histoire de l'Humanité...
mais assez longue pour que ces taux de croissance aient un effet considérable sur les sociétés humaines.
Regardons plus en détail la récente période industrielle. Le graphique suivant donne le taux de croissance du PIB/tête en termes réels pour les principaux pays européens, nord américains et de l'Australie.



Croissance depuis un siècle (Barro & Sala-i-Martin (1995))

Quand on parle de “retrouver la croissance”, on a en tête une période très courte, mais néanmoins marquante, de l’histoire économique : les “Trente Glorieuses” : la période de reconstruction de l’après-guerre, jusqu’au premier choc pétrolier.

Entre 1960 et 1973, le taux de croissance moyen annuel était de 6.3% en France, de 3.8% aux États-Unis et de 9.9% au Japon.

Cela a été suivie d’un ralentissement considérable de l’activité économique accompagné de l’émergence et la persistance du sous-emploi.

Il est alors essentiel de comprendre les principaux mécanismes qui sont sources de croissance.

Remarque 1 : Des faibles écarts de taux de croissance peuvent correspondre à une différence qualitative forte même sur une courte durée comme la vie d’une génération.

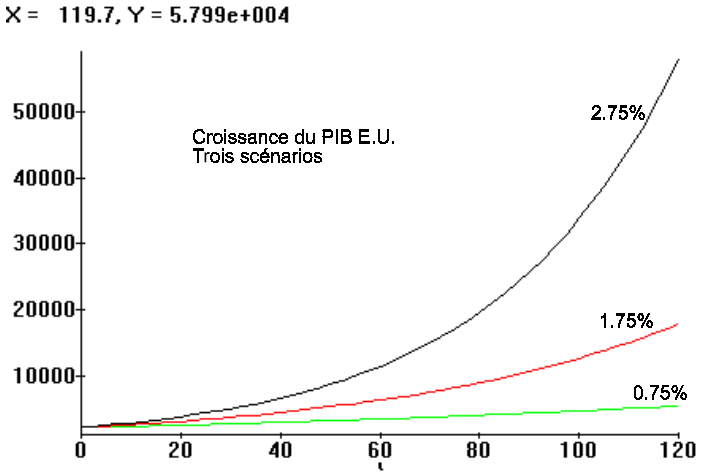
PIB/tête des États-Unis (en dollars de 1985) :

en 1870 : 2 244 $ $\rightarrow$ Multiplication par 8.1
en 1990 : 18 258 $. sur 120 ans.

Cela correspond à un taux de croissance annuel de 1.75%.

Si le taux de croissance était seulement de 0.75%, cela aurait donné un PIB/tête de 5 519 $ en 1990 (proche de Mexique).

Si, au contraire, le taux était 2.75% (le taux de Taiwan dans la période 1900 – 1987), les États-Unis aurait multiplié par 27 leur PIB/tête en atteignant 60 841 $.



Etats-Unis : trois scénarios

Par conséquent, il est essentiel de comprendre les mécanismes de la croissance. Si l'on pouvait la favoriser, même très faiblement, cela aurait des conséquences dramatiques à long terme.

1.2 Faits stylisés de la croissance

Le monde est composé d'économies de toutes les tailles et de formes. Néanmoins, un certain nombre de faits (stylisés) caractérisent la croissance économique de l'histoire récente.

Fait 1 *Il existe une variation considérable du revenu par tête* (y) *entre les économies. Les pays les plus "pauvres" ont des revenus par tête qui sont moins de* 5% *de celui des pays les plus "riches" (*$y = 400\$$ *à Tchad et* $y = 18000\$$ *aux E.U. - 1991).*

La figure suivante donne une idée plus précise de la distribution de la production de richesse à travers le monde : Seulement une très faible proportion de la population crée une richesse proche de celle des E.U.

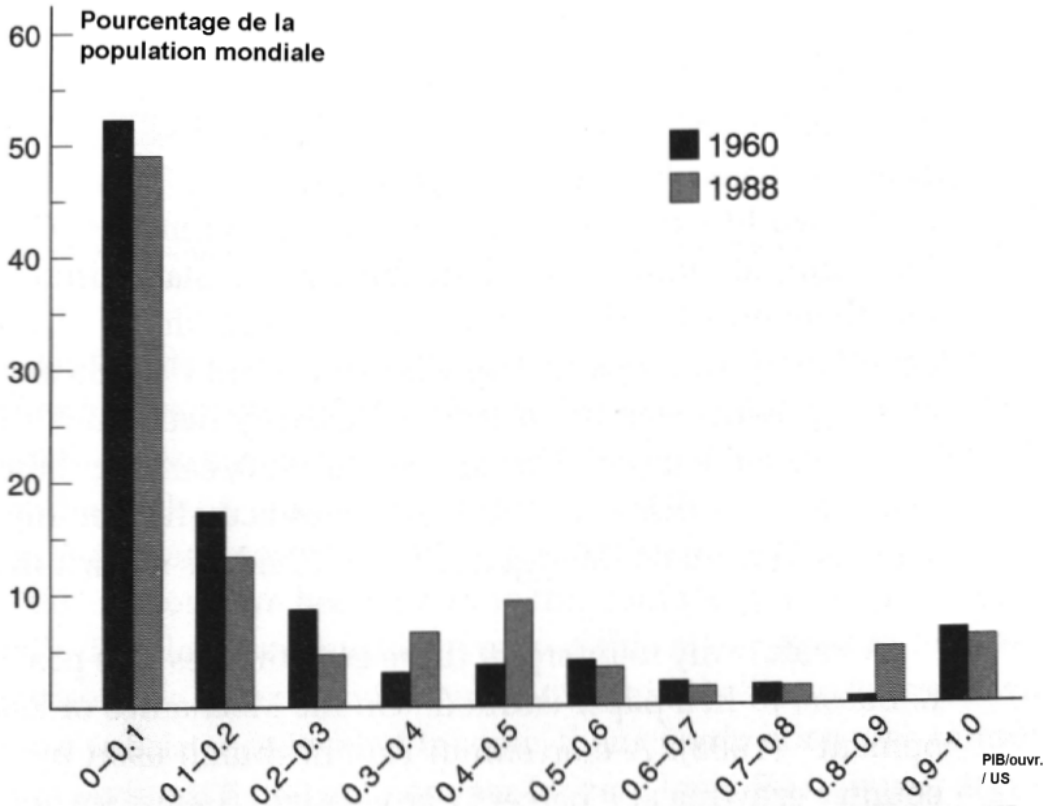


FIG. 1.1: Pourcentage de la population mondiale en fonction de PIB/ouvrier par rapport aux E.U.

Fait 2 *Les taux de croissance varient considérablement entre les pays.*

État-unis	1.4%	51 ans
Chine	2.4%	29 ans
Zimbabwe	0.2%	281 ans
Tchad	-1.7%	-42 ans

(1960-90)

Fait 3 *Les taux de croissance ne sont pas nécessairement constants dans le temps.*

Le taux de croissance en Inde a eu l'évolution suivante par exemple :

1960 – 90	1960 – 80	1980 – 90
2%	1.3%	3.4%

Ces deux derniers faits conduisent à un corollaire important :

Fait 4 *La position relative d'un pays du point de vue de la distribution mondiale des revenus/tête n'est pas immuable. Les pays "riches" peuvent devenir "pauvre" et vice versa.*

Un exemple bien connu est l'Argentine qui faisait parti des pays les plus riches à la fin du 19e.

Fait 5 *Pendant le siècle actuel, aux E.U.,*

1. *le rendement réel du capital, r, n'a pas de tendance croissante ou décroissante ;*
2. *les parts des facteurs de production dans le revenu $(rK/Y, wL/Y)$ n'ont pas de tendance particulière ;*
3. *le taux de croissance moyen du produit par tête a été positif et relativement constant.*

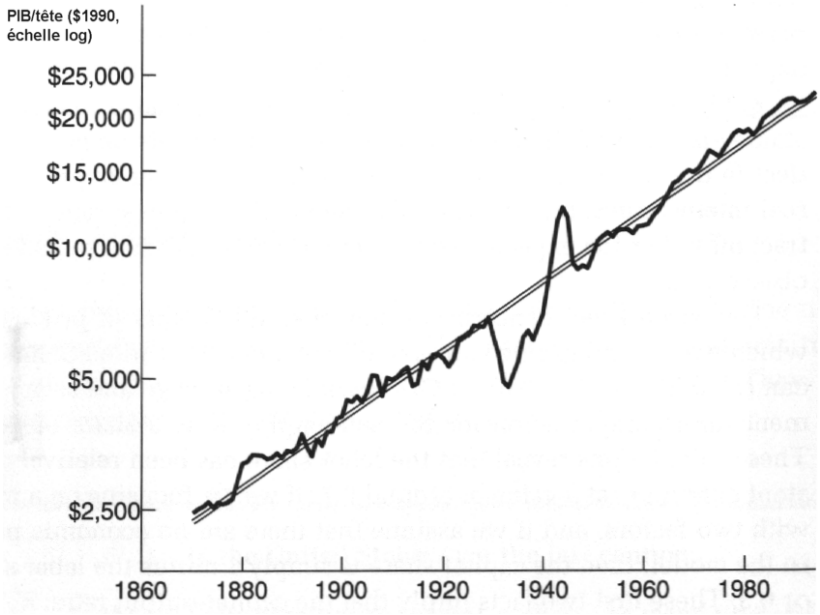


FIG. 1.2: PIB/tête Etats-Unis : sentier de croissance équilibrée ?

Fait 6 *La croissance en produit et la croissance en volume du commerce international sont étroitement liées.*

Questions : Quels sont les mécanismes économiques qui sont derrière ces faits stylisés ? Quelles sont les raisons pour lesquelles un pays devient "riche" et un autre "pauvre" ? Quel est le *moteur* de la croissance ?

1.3 Les théories modernes de la croissance

Tout en intéressant épisodiquement les économistes (Ramsey (1928), Young (1928), Schumpeter (1934), Knight (1944)), la problématique de la croissance disparaît du devant de la scène pendant

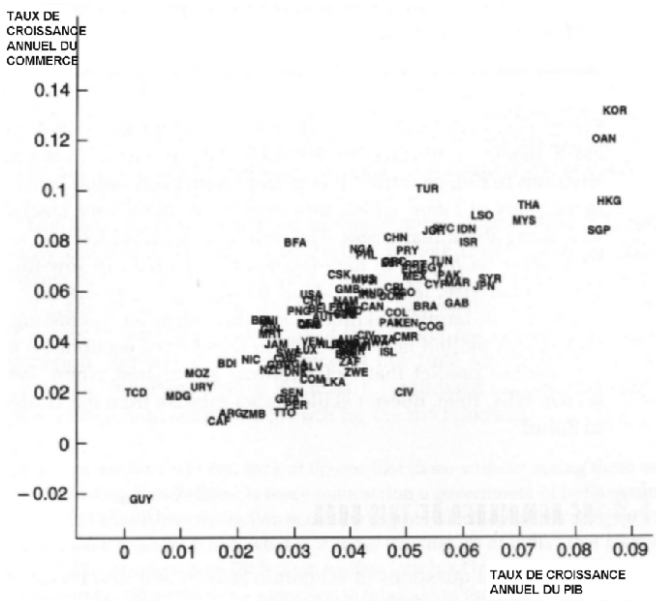


FIG. 1.3: Commerce international et croissance : relation croissante ?

une longue période où l'allocation des ressources (et non leur création) devient le principal objet de curiosité des économistes (Walras, Keynes, Debreu...).

Malgré tout, ces travaux ont donné lieu à un corps de théories modernes de la croissance, assez élémentaires, partageant un certain nombre de caractéristiques communes :

- des comportements concurrentiels ;
- une dynamique d'équilibre ;
- l'analyse du rôle des rendements décroissants et de leur relation avec l'accumulation du capital physique et du capital humain ;
- l'analyse de la relation entre le revenu par tête (*per capita*) et le taux de croissance de la population ;
- et plus récemment, l'analyse du rôle du progrès technique et de l'influence des monopoles sur ce progrès.

Le travail précurseur de Ramsey (1928) est en fait resté ignoré jusqu'aux années 1960. La problématique de la croissance n'a été vraiment ravivée que plus tard, par les travaux des keynésiens Harrod(1939) et Domar (1946). Étant réalisés après la *Grande dépression*, ces travaux ont surtout mis l'accent sur l'instabilité du système capitaliste, comme nous allons le voir dans un des dossiers.

Mais le renouveau n'a vraiment eu lieu qu'à la suite de deux articles publiés par Robert Solow (1956, QJE).

Dans les années 80, l'intérêt pour les théories de la croissance s'est ravivé suite aux travaux de Paul Romer and Robert Lucas.

Ces travaux ont mis le rôle des "idées" et du capital humain au coeur de la problématique de la croissance : Les théories de *croissance endogène*. Cette approche a été accompagnée de nombreux travaux empiriques cherchant à évaluer l'importance de ces facteurs.

C'est un domaine encore très actif et en pleine évolution.

Bibliographie

Gaffard, J.-L. [1997], *Croissance et fluctuations conomiques*, number 2, Montchrestien, Paris.

Jones, C. I. [1998], *Introduction to Economic Growth*, W.W. Norton, New York.

Maddison, A. [1991], *Dynamic Forces in Capitalist Development. A Long-Run Comparative View*, Oxford University Press, Oxford and New York.

Chapitre 2

Le modèle de Solow

Solow, Robert, 1956, *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, 70, 65-94. (Prix Nobel : 1987)

Il s'agit d'un modèle très simple qui fournit déjà des intuitions fondamentales à notre question initiale : "Pourquoi certains pays sont-ils si riches tandis que les autres sont appauvris ?"

2.1 Le modèle de base

Le modèle fait un certain nombre d'hypothèses :

$(H1)$ Les pays produisent et consomment un seul bien homogène (le produit Y) ;

$(H2)$ La production se fait en concurrence parfaite ;

$(H3)$ La technologie est *exogène* ;

$(H4)$ La technologie peut être représentée par une fonction de production de type *néo-classique* basée sur des facteurs substituables : le capital (K) et le travail (L) ;

$(H5)$ La consommation agrégée est représentée par une fonction keynésienne :

$$C = c.Y \Rightarrow S = (1-c)Y = s \cdot Y \tag{2.1}$$

$(H6)$ Le taux participation à l'emploi de la population est constant. Si la population croît au taux n, l'offre de travail (L) augmente aussi à ce taux n :

$$\frac{d\log(L)}{dt} = \frac{dL/dt}{L} = \frac{\dot{L}}{L} = n \tag{2.2}$$

Pour le propos du cours, nous le simplifierons encore en supposant que la fonction de production est de type *Cobb-Douglas* :

$$Y = F(K,L) = K^{\alpha}L^{(1-\alpha)}, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Les rendements d'échelle sont donc constants $(\alpha + (1-\alpha) = 1)$. En concurrence parfaite, les firmes sont preneuses de prix et elles maximisent le profit

$$\max_{K,L} F(K,L) - rK - wL$$

où r est le taux d'intérêt réel et w, le salaire réel. La maximisation de profit implique

$$w = \frac{\partial F}{\partial L} = (1-\alpha)\frac{Y}{L}$$
$$r = \frac{\partial F}{\partial K} = \alpha\frac{Y}{K}$$

De plus,

$$wL + rK = Y$$

du fait de l'homogénéité et de la constance des rendements d'échelle (identité d'Euler). Cette technologie avec des productivités marginales décroissantes est la différence principale de ce modèle par rapport au modèle de Harrod.

Plusieurs de nos faits stylisés étaient exprimés en termes de produit par tête (*per capita*). Pour cette raison, nous allons utiliser une version de ce modèle exprimée en termes de valeurs per capita :

$$k = \frac{K}{L} \quad \left(\text{avec } \frac{L}{L} = 1\right).$$
$$y = \frac{Y}{L} = f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = \frac{K^{\alpha}L^{(1-\alpha)}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = k^{\alpha}$$
$$y = f(k) = k^{\alpha} \tag{2.4}$$

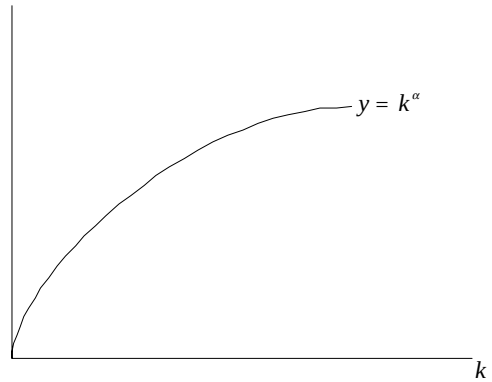


FIG. 2.1: Fonction de production per capita Cobb-Douglas

Ce graphique fait clairement apparaître les rendement décroissants du capital par ouvrier.

La seconde équation fondamentale du modèle de Solow concerne l'accumulation du capital et donc la dynamique :

$$\dot{K} \equiv \frac{dK}{dt} = I - \delta K \tag{2.5}$$

la variation du capital est égale à la différence entre investissement et la dépréciation du capital (au taux constant δ).

Comme nous avons une économie fermée, l'investissement est nécessairement égal à l'épargne (équilibre du marché des biens) :

$$I = S = s \cdot Y \tag{2.6}$$
$$\dot{K} = sY - \delta K \tag{2.7}$$

D'autre part, nous avons :

$$k = \frac{K}{L} \Rightarrow \log(k) = \log(K) - \log(L)$$
$$\Rightarrow \frac{d\log(k)}{dt} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{sY - \delta K}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{2.8}$$

Or, l'équation 2.2 nous donne le taux de croissance du facteur travail (du fait de l'équilibre du marché de travail)

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \Rightarrow \frac{d\log(L)}{dt} = n \Rightarrow \log(L) = \int n dt = nt + C_0$$
$$\Rightarrow L(t) = e^{nt+C_0}. \quad L(0) = e^{C_0} = L_0.$$
$$L(t) = L_0 e^{nt}. \tag{2.9}$$

L'équation 2.8 devient donc

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY}{K} - \delta - n = \frac{sy}{k} - \delta - n.$$

Ce qui nous donne l'équation dynamique fondamentale du capital

$$\boxed{\dot{k} = s \cdot f(k) - (\delta + n) \cdot k\,,} \tag{2.10}$$

2.1.1 Le diagramme de Solow

Les deux équations fondamentales du modèle de Solow sont donc(2.10) et (2.4). Si l'économie part d'une situation initiale $(k_0 = K_0/L_0)$, la première équation nous donne, pour chaque période, la production donc l'épargne et l'investissement, la seconde, la manière dont ces éléments déterminent l'accumulation du capital

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \boxed{k_0} & \xrightarrow{f(k)} & y & \xrightarrow{s,\delta} & \dot{K} \\ {\scriptstyle n}\downarrow & & & & \downarrow \\ L_1 & \longrightarrow & \boxed{k_1} & \longleftarrow & K_1 \end{array}}$$

On peut donc dérouler l'évolution de l'économie dans le temps en utilisant ces deux équations. Mais est-ce que ce modèle peut nous permettre d'expliquer les différents faits stylisés ? Peut-il donc expliquer les différences qui existent entre les économies ?

On peut répondre à ces questions en utilisant une représentation graphique de cette dynamique :

Cette représentation résume de manière très simple toutes les données de l'économie en fonction du capital/tête. Notamment le taux de variation de k est donné par l'écart entre les deux courbes : $sf(k)$ et $(n+\delta)k$.

A l'intersection de ces deux courbes nous avons

$$\frac{\dot{k}}{k} = 0 \quad \Rightarrow \dot{k} = 0, \quad k = k^*$$

C'est l'**état stationnaire** et le capital/tête ne change plus à partir de cet état. En dehors de l'état stationnaire, nous avons

$$k_0 < k^* \Leftrightarrow \dot{k} > 0 \tag{2.11}$$
$$k_0 > k^* \Leftrightarrow \dot{k} < 0 \tag{2.12}$$

Dans le *Cas* 1, le capital/tête de l'économie augmente et on a une *intensification du capital* dans l'économie. Dans le *Cas* 2, le capital/tête diminue et on a un *élargissement du capital* dans l'économie.

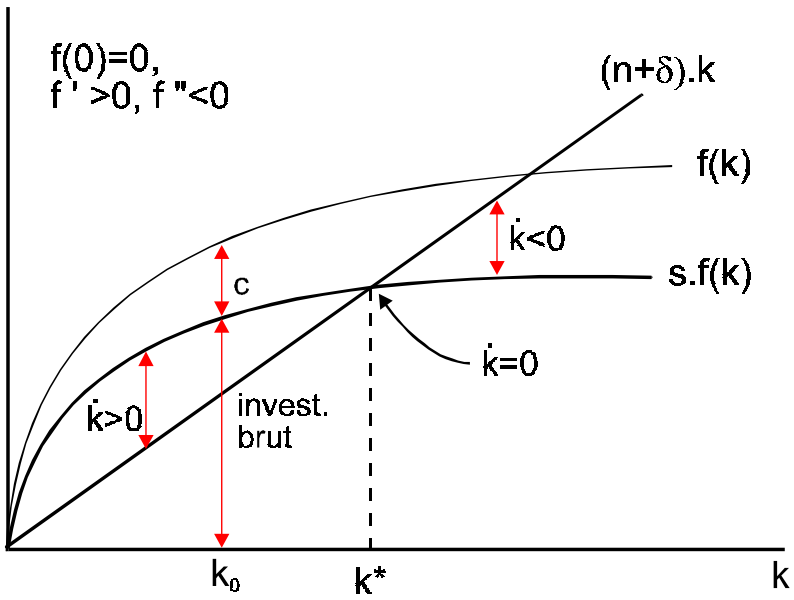


FIG. 2.2: Le diagramme de Solow

2.1.2 Statiques comparatives

La statique comparative permet d'étudier l'évolution du capital/tête à partir d'un état stationnaire et suite à un choc qui provient d'un changement dans l'environnement économique.

Une augmentation du taux d'investissement

Si à partir d'un état stationnaire les consommateurs augmentent leur taux d'épargne

$$s \to s' > 0,$$

cela se traduira nécessairement par une augmentation du taux d'investissement dans l'économie. Quel serait l'effet d'un tel choc sur k et y ? Nous pouvons répondre à cette question grâce à un graphique.

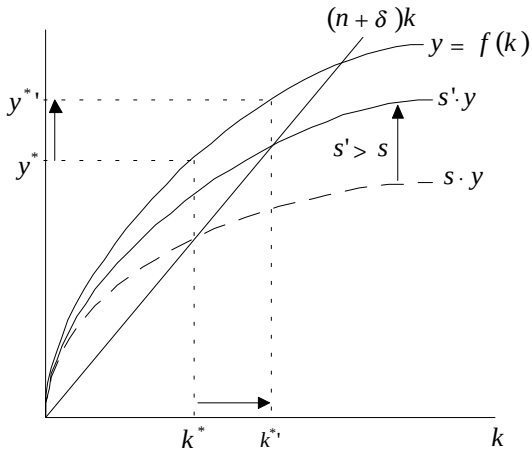


FIG. 2.3: Augmentation du taux d'investissement

Une croissance démographique plus forte

Une augmentation du taux de croissance démographique $(n' > n)$ impose une pression plus forte sur l'accumulation du capital en augmentant le dénominateur du capital/tête. L'effet sur l'état stationnaire de l'économie peut de nouveau être analysé par un graphique (Figure 2.4).

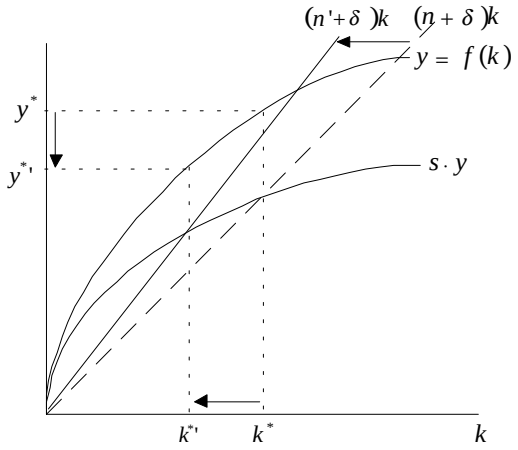


FIG. 2.4: Croissance du taux démographique

2.1.3 Propriétés de l'état stationnaire

L'état stationnaire est déterminé par la condition

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+\delta)\,k = 0$$
$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

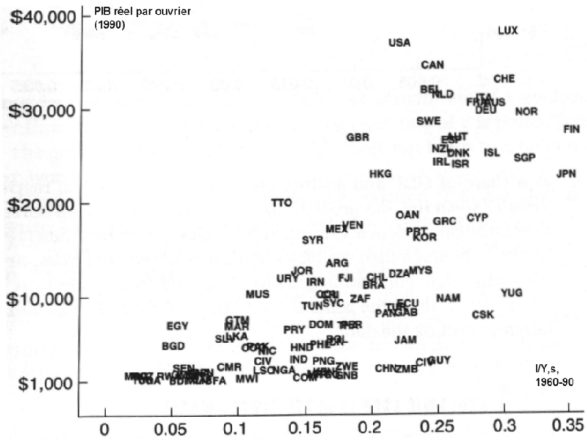
La production par tête à cet état stationnaire est donnée par

$$y^* = f(k^*) = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

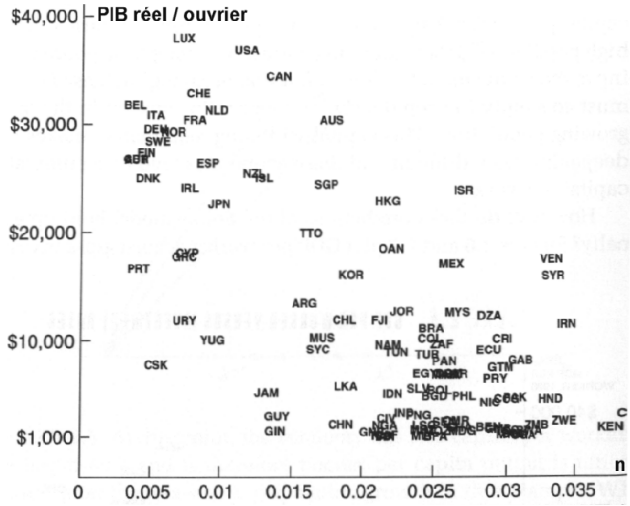
Cela donne une première réponse à la question "Pourquoi certains pays sont riches et certains sont pauvres ?" :

Proposition 1 *Les pays qui ont un taux d'épargne/investissement plus élevé ont tendance à être plus "riches" et ceux qui ont un taux de croissance démographique plus fort ont tendance à être plus "pauvres".*

Comment est-ce que ces prédictions se comparent aux observations ?



Taux d'investissement et "richesse"



Croissance démographique et "richesse"

2.1.4 Croissance économique dans le modèle simple

Dans cette version simplifiée, les variables *per capita* sont constantes à l'état stationnaire. Les variables absolues (Y,S,C,K) croissent au même taux que la population

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{y}}{y} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} = n.$$

Et les faits stylisés ? Le modèle génère, à l'état stationnaire (le long terme)

- une variation entre les PIB/tête entre les pays ;
- un ratio capita-produit (K/Y) constant (car k et y sont constants) ;
- k étant constant, le rendement du capital (la productivité marginale de k) est constant.

Mais il ne peut générer un fait stylisé très important : la croissance soutenue des revenus/tête (y) ! Dans ce modèle les économies peuvent croître à court terme mais pas à long terme : même si un pays s'écarte à un moment donné de l'état stationnaire, il suivra un *sentier de transition* et finira par atteindre le nouvel état stationnaire. La croissance se ralentit en plus au fur et à mesure que l'économie s'approche de l'état stationnaire.

Ce résultat est dû à $\alpha < 1$ dans l'équation dynamique fondamentale

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - (n+\delta) = s \cdot \frac{f(k)}{k} - (n+\delta) \tag{2.13}$$

et donc quand k augmente, le taux de croissance de k diminue. Comme le taux de croissance de y est proportionnel à celui de k, il décroît aussi. Une représentation graphique séparée des deux éléments du membre droit de cette équation facilite l'étude l'évolution de $\dot{k}/k$.

2.2 Technologie dans le modèle de Solow

La croissance n'existe donc pas dans le modèle de base si l'on considère les variables per capita. Or, la présence d'un progrès technique peut changer ce résultat. Soit la fonction de production

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha} \cdot (AL)^{1-\alpha} \tag{2.14}$$

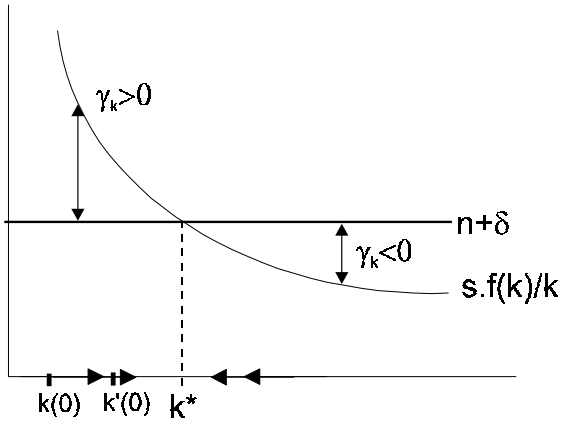


FIG. 2.5: Taux de croissance de k

A représente alors l'évolution de la technologie sous la forme d'un progrès technique renforçant le travail ("labor augmenting") ou "neutre au sens de Harrod". Le progrès technique correspond à la croissance de A dans le temps : une unité de travail devient alors plus productive.

Note : Différents types de progrès technique :

$Y = F(K, AL)$	neutralité au sens de Harrod
$Y = F(AK, L)$	neutralité au sens de Solow
$Y = AF(K, L)$	neutralité au sens de Hicks

Le progrès technique est *exogène* dans le modèle de Solow. Il correspond à une croissance de A au taux constant

$$\frac{\dot{A}}{A} = g \Leftrightarrow A = A_0 \cdot e^{gt}$$

Nous allons maintenant étudier le modèle de Solow avec ce type de progrès technique.

L'accumulation de capital ne se modifie pas de manière fondamentale

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta \tag{2.15}$$

La fonction de production per capita est donnée par

$$y = k^{\alpha} A^{1-\alpha}$$

Ce qui donne, par dérivation logarithmique

$$\gamma_y = \frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{A}}{A} = \alpha \cdot \gamma_k + (1-\alpha) \cdot g$$

Or (2.15) implique que le taux de croissance de K ne peut être constant que si et seulement si Y/K est constant (car δ est constant). Par conséquent, nous devons avoir $\gamma_Y = \gamma_K$ et donc $\gamma_y = \gamma_k$. Dans ce cas nous avons un *sentier de croissance équilibré* sur lequel le capital, l'output, la consommation et la population croissent aux taux constants.

$$\gamma_y = \alpha \cdot \gamma_y + (1-\alpha) \cdot g \Leftrightarrow \gamma_y = \gamma_k = \gamma_A = g \geq 0.$$

Grâce au progrès technique, le capital et le PIB par tête augmentent donc sur le sentier de croissance équilibré : Différemment du modèle de base, le modèle avec progrès technique vérifie ce fait stylisé élémentaire.

Remarque 1 *En définissant de nouvelles variables de type $\widetilde{x} = x/AL$, nous pouvons reconstruire le diagramme de Solow en fonction de $\widetilde{k}$, le capital par unité de travail* ***effective****, qui tient compte de la croissance de la productivité du travail. Dans ce cas, l'état stationnaire de ce nouveau modèle correspond à $\gamma_{\widetilde{k}} = \gamma_{\widetilde{y}} = 0$ et à un sentier de croissance é*

quilibré avec $\gamma_k = \gamma_y = g$.

2.3 Le paradoxe de la productivité

Solow, R., 1957, "Technical Change and the Aggregate Production Function", Review of Economics and Statistics, 39, 312-320.

Sans la productivité technique, l'accumulation du capital finit par subir les rendements décroissants. Le progrès technique implique une amélioration continue de la technologie qui permet d'éliminer l'effet des rendements décroissants en renforçant la productivité du travail. Cela conduit alors à une croissance per capita dans le modèle avec PT. L'article de 1957 cherche à évaluer empiriquement ces effets.

Solow part de la fonction de production suivante

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

où B représente un PT neutre à la Hicks. Nous obtenons alors (via la dérivation logarithmique)

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{B}}{B} + \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}. \tag{2.16}$$

Cette équation indique que le taux de croissance du PIB résulte de la moyenne pondérée du taux de croissance des facteurs, complétée par le taux de croissance de B (le progrès technique). Ici le progrès technique ne renforce pas un facteur particulier mais la productivité totale des facteurs (**PTF**). L'étude statistique de cette équation devrait permettre de préciser le rôle des différents éléments dans la croissance (*une comptabilité de la croissance*). Le tableau suivant donne le taux de croissance aux EU entre 1960 et 1990.

Période	$\dot{Y}/Y$	$\dot{y}/y$
$1960-70$	4.0	2.2
$1970-80$	2.7	$\boxed{0.4}$
$1980-90$	2.6	1.5
$1960-90$	3.1	1.4

Ce tableau montre clairement un ralentissement de la croissance pendant les années 70. Comment cette évolution peut-elle être expliquée par l'évolution de la contribution des différents facteurs ? Est-elle due à un emploi plus faible, ou une érosion du stock de capital ? Pour répondre à ces questions, il faut étudier statistiquement l'équation précédente. Le tableau suivant utilise $\alpha = 1/3$ pour calculer l'effet des deux facteurs.

		Contributions de			
Période	$\dot{Y}/Y$	K	L	PTF	$\dot{y}/y$
$1960-70$	4.0	0.8	1.2	1.9	2.2
$1970-80$	2.7	0.9	1.5	$\boxed{0.2}$	$\boxed{0.4}$
$1980-90$	2.6	0.8	0.7	1.0	1.5
$1960-90$	3.1	0.8	1.2	1.1	1.4

Ce tableau indique que sur la période 1960-90, les E.U. ont observé un taux de croissance annuel moyen de 3.1%. 0.8 de ces 3.1 points étaient dû à l'accumulation du capital $\left(\alpha \cdot \dot{k}/k = 0.8\right)$, 1.2 étaient dû à la croissance de l'emploi et 1.1 restant ne peuvent être expliquée par l'évolution de l'utilisation des facteurs. Une interprétation possible est la croissance de la productivité totale des facteurs (PTF), ou le progrès technique $\left(B = A^{1-\alpha}\right)$.

Le tableau indique aussi la cause de la faiblesse de la croissance suite au premier choc pétrolier : le ralentissement de la productivité des facteurs qui passe de 1.9 à 0.2 ce qui conduit à une taux de croissance per capita de 0.4%. On observe aussi que cela s'est accompagné d'une augmentation de l'emploi sur cette période. Le stock de capital reste assez stable sur la totalité de la période. La PTF ne retrouve pas son niveau des années 60 même si elle augmente dans les années 80. Il y a donc une sorte de paradoxe ici : l'utilisation des facteurs augmente mais cela ne se traduit pas par une croissance plus importante.

Plusieurs explications ont été proposées pour le ralentissement de la productivité. La plus connue souligne le rôle joué par l'augmentation du prix de l'énergie suite au choc pétrolier. Mais cette explication est contredite par le fait que le prix de l'énergie, en termes réels, était plus faible vers la fin des années 80 qu'avant le choc. La productivité aurait dû revenir vers le rythme d'avant le choc.

Une autre explication se base sur la modification de la distribution sectorielle de l'emploi : le poids du tertiaire a augmenté or la productivité est traditionnellement plus élevée dans le secteur manufacturier. Cela est d'autant plus vraisemblable que la productivité a retrouve, durant les années 80, son rythme d'antan dans le secondaire. Celle-ci peut aussi être complétée par la réduction des dépenses de R&D dans les années 60. Néanmoins, nous n'avons toujours pas une explication satisfaisante du ralentissement de la croissance.

Une autre application intéressante de cette *comptabilité* concerne la croissance rapide des nouveaux pays industrialisés (NPI) : Corée du Sud, Hong Kong, Singapore et Taiwan. Les taux de croissance moyen de ces pays (voir l'exemple de Taiwan) sont supérieurs à 5% pendant la période 1960–90. Il est possible de montrer que la plus grande partie de cette croissance est due à l'accumulation des facteurs : une augmentation de l'investissement en capital physique, l'éducation, une participation plus forte à l'emploi et un transfert de l'agriculture vers le secondaire (Young(1995)). Le progrès technique semble jouer un rôle beaucoup plus limité. La croissance rapide de ces pays peut donc être expliquée dans le cadre du modèle de Solow.

Chapitre 3

Applications empiriques des modèles néo-classiques

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'évaluation empirique du modèle de Solow et d'autres modèles qui en descendent. Nous allons aussi étudier l'important problème de la convergence entre les pays : le rattrapage des pays riches par les pays pauvres.

3.1 Le modèle de Solow avec capital humain

Mankiw, G., D. Romer, D. Weil, 1992, "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 107, 407-438.

Lucas, R., 1988, "On the Mechanics of Economic Development", Journal of Monetary Economics, 22, 3-42.

Cet article montre que le modèle de Solow est plutôt satisfaisant dans sa confrontation avec les données de la croissance économique. Il l'est encore plus si l'on l'étend de manière à tenir compte de du *capital humain* : les populations actives des différents pays ont des niveaux différents de formation et de qualification.

Supposons maintenant que la production est réalisée en combinant le capital physique avec le travail qualifié, H suivant une fonction Cobb-Douglas

$$Y = K^{\alpha} (AH)^{1-\alpha} \tag{3.1}$$

où A représente un progrès technique renforçant le travail. A croît au taux exogène g.

Les travailleurs de cette économie peuvent augmenter leur qualification en choisissant de consacrer du temps à leur éducation au lieu de travailler. Soit u la fraction du temps d'un individu réservée à l'éducation et soit L la quantité totale de travail de base utilisée dans la production. Si la population est donnée par N_t

$$L_t = (1-u) N_t.$$

L'éducation transforme le travail de base en travail qualifié selon la relation

$$H_t = e^{\psi u} \cdot L_t \tag{3.2}$$

où ψ est une constante positive. Si $u = 0$, $H = L$ et la production doit se réaliser avec du travail non-qualifié. Une croissance de u implique une croissance de la quantité *effective* de travail utilisé

dans la production. Ainsi

$$\log H = \psi u + \log L \Rightarrow \frac{\partial \log H}{\partial u} = \frac{\partial H/\partial u}{H} = \psi$$

Si u augmente de manière marginale, cela augmente H de $(\psi \times 100)\,\%$. Cette forme exponentielle correspond donc aux résultats empiriques en économie de travail qui montrent que chaque année d'école supplémentaire correspond à un salaire reçu supplémentaire de 10%.

Le capital physique est accumulé par l'investissement financé par l'épargne

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K \tag{3.3}$$

où s_K est le taux d'investissement et δ est le taux de dépréciation. Nous résolvons en utilisant les valeurs *per capita*.

$$y = \frac{Y}{L} = k^{\alpha}(Ah)^{1-\alpha}, \quad h = e^{\psi u}. \tag{3.4}$$

Nous supposons pour simplifier que comme le taux d'investissement s_K, u est exogène et constante. Par conséquent h est constant et le modèle est similaire au modèle de Solow avec progrès technique. Le long d'un SCE, y et k vont croître au taux constant g. Nous résolvons donc ce modèle en considérant les variables d'état qui sont constant sur le SCE

$$\tilde{y} = y/Ah,\ \tilde{k} = k/Ah, \quad \tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha} \tag{3.5}$$

En suivant le même raisonnement que dans le chapitre 2, nous obtenons

$$\dot{\tilde{k}} = s_K \tilde{y} - (n + \delta + g)\tilde{k} \tag{3.6}$$

Sur le SCE, nous devons avoir $\dot{\tilde{k}}/\tilde{k} = 0$. Cela implique donc

$$\frac{\tilde{k}^*}{\tilde{y}^*} = \frac{s_K}{n+\delta+g} \Rightarrow \left(\frac{\tilde{k}^*}{\tilde{y}^*}\right)^{\alpha} = \left(\frac{s_K}{n+\delta+g}\right)^{\alpha}$$

or, l'équation (3.5) implique (en divisant les deux côtés par $\tilde{y}^{\alpha}$)

$$\tilde{y}^{*1-\alpha} = \left(\frac{\tilde{k}^*}{\tilde{y}^*}\right)^{\alpha} = \left(\frac{s_K}{n+\delta+g}\right)^{\alpha}$$
$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s_K}{n+\delta+g}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

qui donne la valeur du produit par unité de travail qualifié effectif sur le sentier de croissance équilibré. Si l'on s'intéresse à l'évolution du produit/tête sur le SCE, cette équation nous donne

$$y_t^* = \left(\frac{s_K}{n+\delta+g}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot h \cdot A_t \tag{3.7}$$

qui tient compte de l'évolution du travail effectif grâce au progrès technique (A_t) et à l'éducation (h). Le produit/tête croît donc au taux g sur le SCE. Pour une valeur donnée de A, cette équation donne une explication plus riche de la différence de richesse qui peut exister entre les pays :

Conjecture 1 *Certains pays sont riches car ils ont un taux d'investissement en capital physique élevé et/ou un taux de croissance démographique faible et/ou un progrès technique fort et/ou ils consacrent une fraction importante de la vie de la population à l'éducation* $(e^{\psi u})$.

Quelle est la pertinence de cette explication en comparaison avec les données empiriques ? Comme les revenus augmentent dans le temps, il vaut mieux raisonner en termes de revenus relatifs. Par exemple, si l'on définit le revenu/tête relatif d'un pays par rapport aux États-Unis,

$$\hat{y}^* = \frac{y^*}{y^*_{EU}}$$

nous obtenons de l'équation (3.7)

$$\hat{y}^* = \left(\frac{\hat{s}}{\hat{x}}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot \hat{h}\hat{A} \tag{3.8}$$

où $(\hat{})$ indique la valeur relative de la variable par rapport à la valeur EU et $x \equiv n+g+\delta$. Mais $\hat{y}^*$ ne sera constant que si le pays croît à la même vitesse que les EU.

De plus, nous allons supposer que le progrès technique a le même rythme entre les différents pays. Même si cela entre en contradiction avec un des faits stylisés les plus visibles (la diversité des taux de croissance entre les pays), le progrès technique est mal adapté pour représenter cette diversité quand la croissance est uniquement tirée par la technologie comme dans ce modèle . En effet, pour deux pays B et C

$$g_B > g_C \Rightarrow \lim_{t\to\infty} (y_B - y_C) = \infty$$

ce qui est difficilement acceptable. Cela est en partie compensé par le transfert de technologie qui équilibre le processus. Une manière d'intégrer ce phénomène est de supposer simplement que g est constant entre les pays. Nous analyserons cet argument plus tard.

Sous ces hypothèses, on peut estimer les paramètres de l'équation (3.8) pour confronter ce modèle aux donnée empiriques. Cette estimation est basée sur les valeurs et définitions suivantes pour les paramètres

- $\alpha = 1/3$ (cela correspond à la part observée des revenus du capital dans le PIB) ;
- $u =$ le niveau de scolarisation moyenne de la population active (en années) ;
- $\psi = 10\%$ (chaque année de scolarisation supplémentaire implique un incrément de salaire de 10%) ;
- $g+\delta = 7.5\%$ pour tous les pays ;
- A est le même pour tous les pays (on pénalise donc la capacité descriptive du modèle en éliminant la diversité technologique évidente).

La figure (3.1) compare la valeur théorique de $\hat{y}$ avec la valeur observée sur un diagramme à 45°.

On observe que pour tous les pays industrialisés la valeur théorique et la valeur empirique sont très proches. Pour les pays tels que Uganda ou Mozambique la valeur théorique est supérieure à la valeur empirique : pour les pays les plus pauvres, le modèle prédit une richesse plus importante que les observation (il surestime leur richesse relative).

Ce résultats est en partie dû à l'hypothèse – bien héroïque – d'homogénéïté technologique. On pourrait utiliser la fonction de production (3.4) pour calculer la valeur de A pour chaque économie de manière à tenir compte de cette diversité des niveaux technologiques

$$A = \left(\frac{y}{k}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot \frac{y}{h}$$

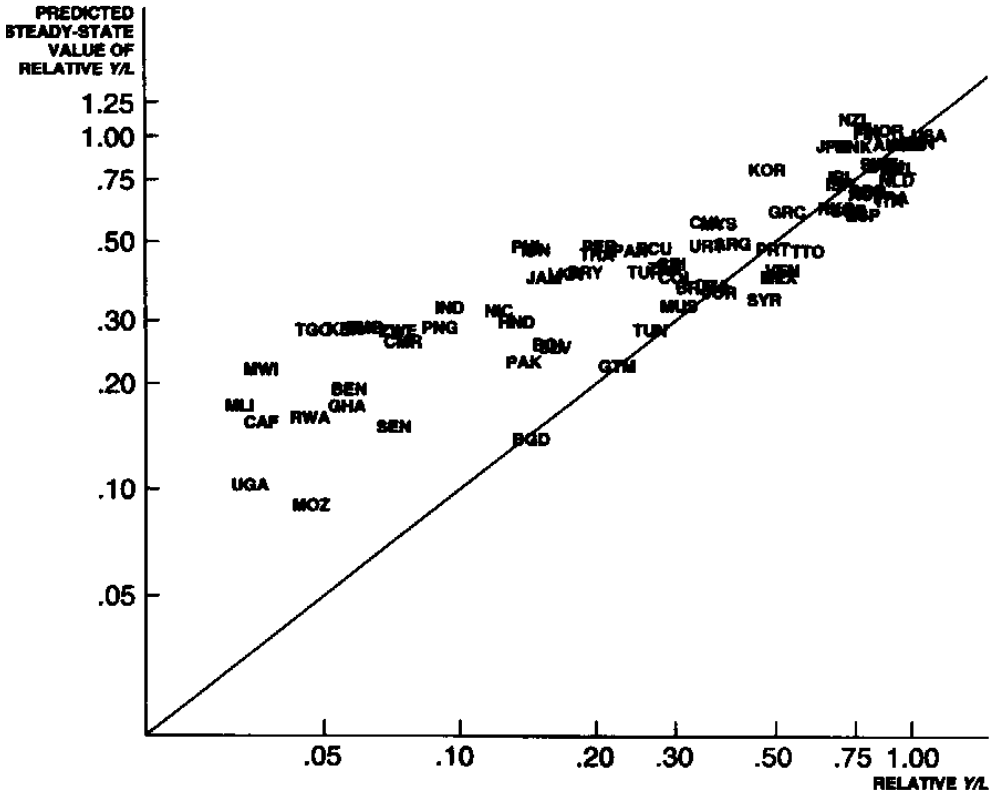


FIG. 3.1: Le modèle néoclassique à l'epreuve des faits

puisqu'il suffit de calculer ces différents éléments à partir des données empiriques. En effectuant ce calcul pour 1990 et en intégrant ces valeurs de A pour calculer les valeurs théoriques de $\hat{y}$, nous obtenons un nouvel ajustement (voir Figure 3.2).

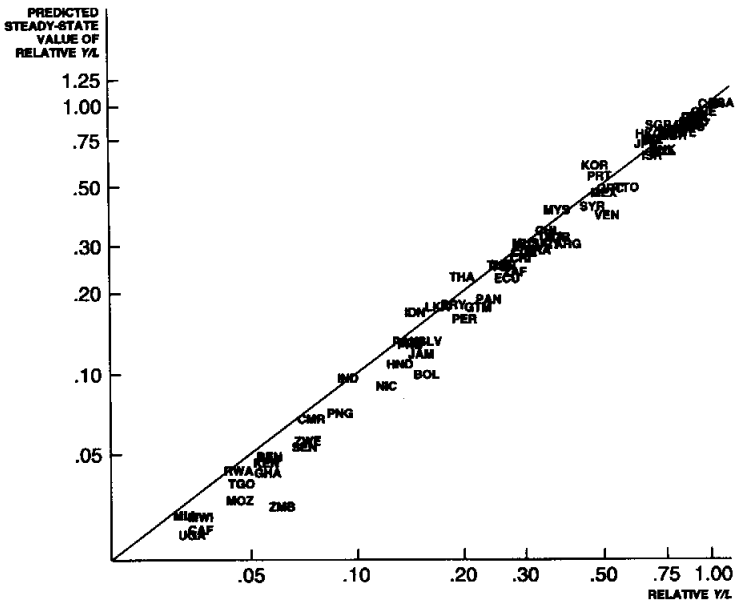


FIG. 3.2: Ajustement avec diversité technologique

La conclusion saute aux yeux : la prise en compte de la diversité technologique améliore considérablement l'ajustement du modèle néo-classique aux données. Ce modèle nous donne donc une explication assez pertinente des différences de richesse entre les pays (Conjecture 1).

3.2 Convergence et diversité des taux de croissance

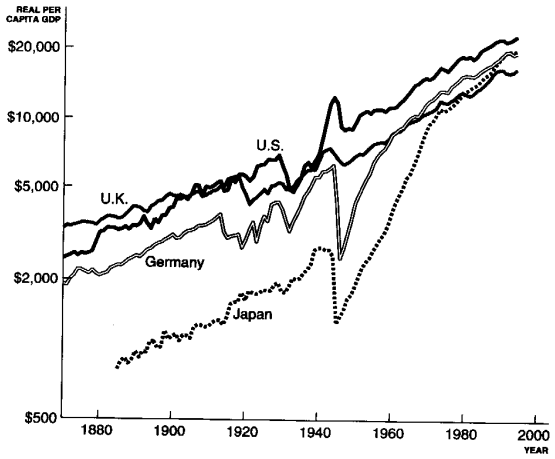


FIG. 3.3: y, 1870-1994, pays industrialisés

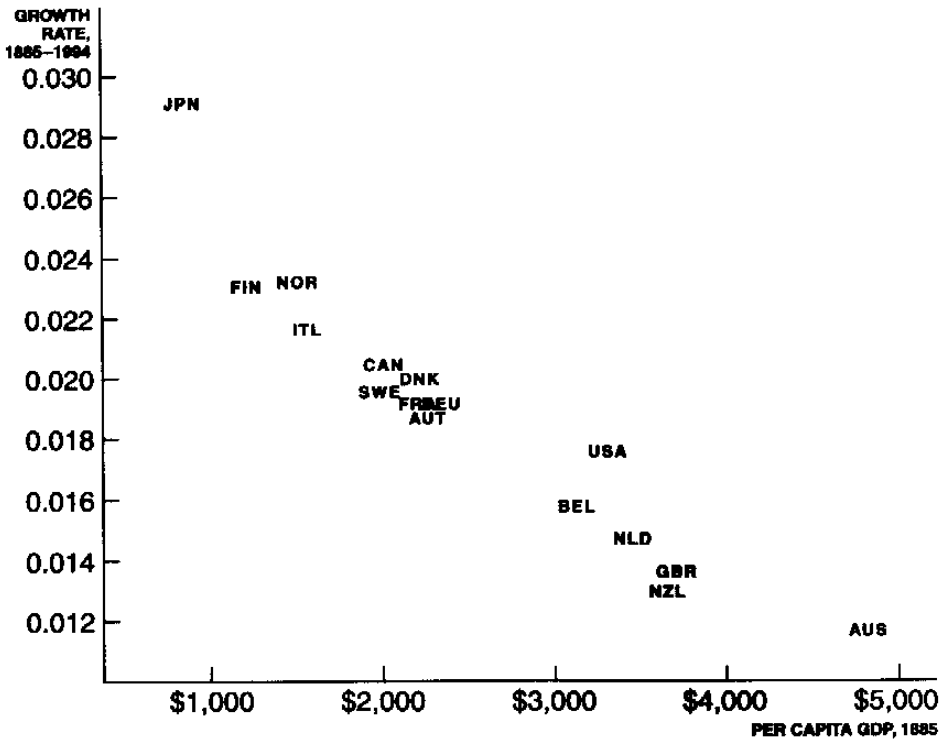


FIG. 3.4: y_{1885}, et $\dot{y}/y$ 1885-1994

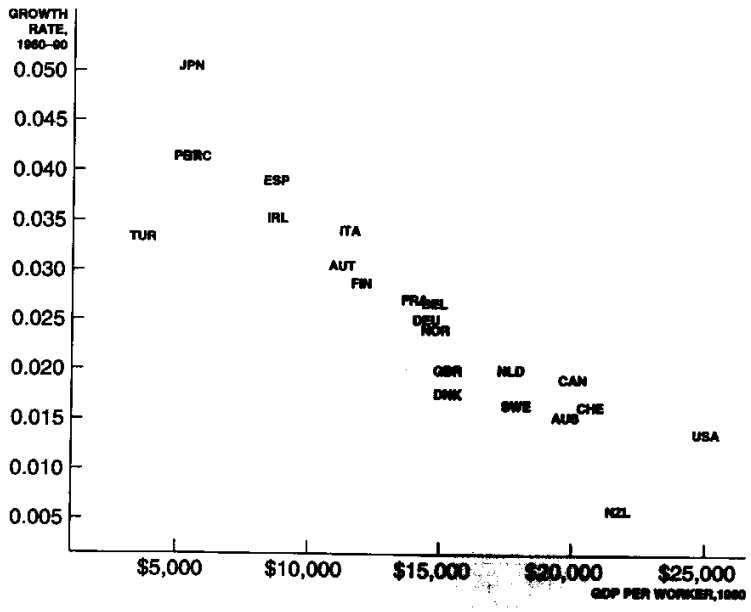


FIG. 3.5: Convergence dans l'OCDE 1960-90

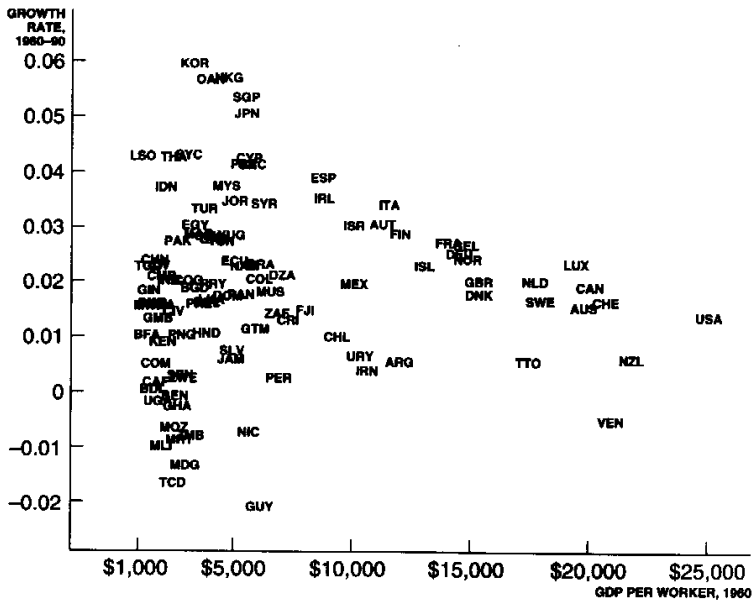


FIG. 3.6: Absence de convergence dans l'économie mondiale, 1960-90

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s_K \frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - (n + g + \delta)$$

où $\tilde{y}/\tilde{k} = \tilde{k}^{\alpha-1}$.

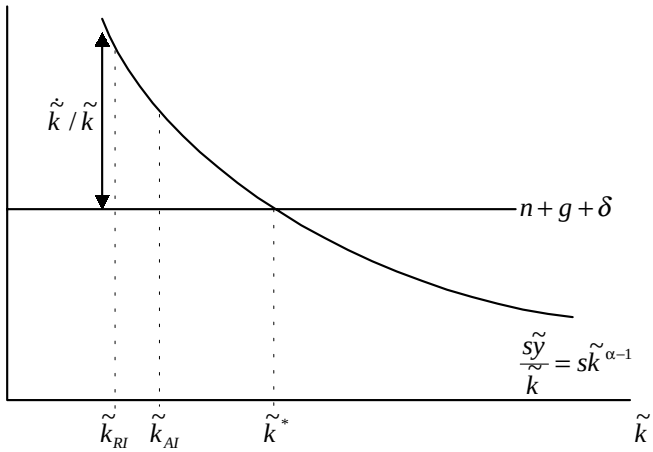


FIG. 3.7: Dynamique de transition et convergence

Conjecture 2 (Convergence absolue) *La convergence devrait avoir lieu entre les économies qui ont des états stationnaires identiques : parmi ces pays, les "pauvres" devrait croître plus rapidement que les riches.*

Conjecture 3 (Principe de dynamique de transition) *Plus une économie est sous son état stationnaire, plus vite sera sa croissance, plus une économie est au dessus de son état stationnaire plus lente sera sa croissance.*

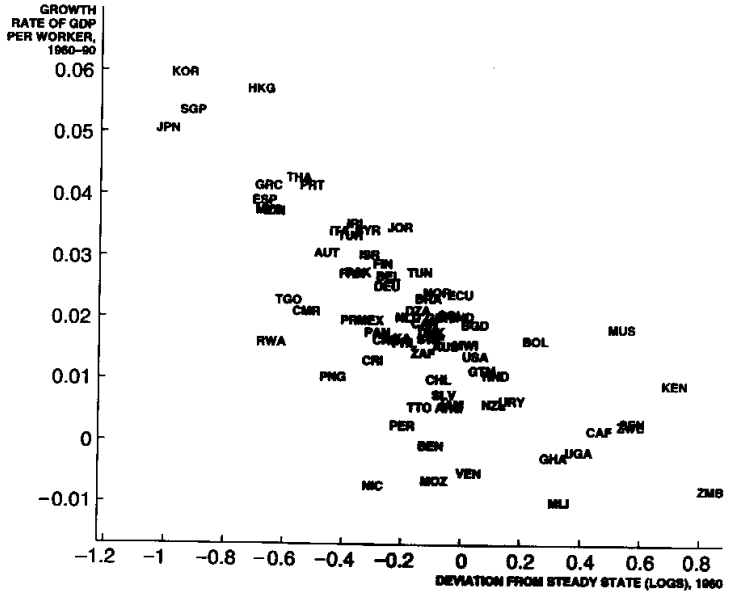


FIG. 3.8: Convergence conditionnelle, 1960-90, économie mondiale.

Chapitre 4

Économie des idées

Moteurs des modèles néo-classiques : accumulation du capital (physique et/ou humain).

Le rôle de la technologie apparaît néanmoins (c'est le coeur de la réponse de Solow). Mais la technologie n'est pas modélisé : le progrès technique est exogène.

4.1 Qu'est-ce que la technologie ?

Dans les théories de la croissance est de développement, le terme de technologie à un sens particulier : la technologie est la manière dont les inputs sont transformés en output pendant le processus de production. Par exemple, si nous avons une fonction de production , cette fonction $F(K,L,\cdot)$ représente la transformation des inputs un output. Dans la fonction de Cobb-Douglas, $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$, A est un indice représentant le niveau technologique du pays. Comment évolue ce niveau technologique ?

Le rôle des idées : innovations de processus. Ex. La loi de Moore (nb transistors x 2 tous les 18 mois).

4.2 Les idées en tant que bien

Les idées nouvelles sont des biens particuliers dont la présence est incompatible avec la concurrence parfaite :

$$\boxed{\text{idées}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{utilisation}\\ \text{non-rivale}\end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{rendements}\\ \text{croissants}\end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{concurrence}\\ \text{imparfaite}\end{array}}$$

a) Les idées ont une utilisation *non-rivale* : *Toyota* $->$ *JAT* $->$ *Peugeot.*

Mais elle peuvent être *protégées* (on peut exclure d'autres de les utiliser) grâce

- au secret ;
- aux droits de propriétés (brevets).

En tant que bien, elles ont donc deux dimensions : rivalité et degré d'exclusion.

Les biens dont l'utilisation est non-rivale et qui ne sont pas protégés sont habituellement appelés les "biens publics" (défense nationale ou R&D de base).

La place des biens dans l'économie dépend de leurs attributs et donc de leur position dans cet espace à deux dimensions :

	Rivale	Non-rivale
Élevé	Services juridiques	Émission satellite cryptée
↑	Lecteur de CD	
|	Lecteur de disquette	
Degré d'exclusion		Code source de logiciel
|		Manuel de l'utilisateur
|	Poissons dans la mer	Défense nationale
↓		R&D de base
Faible	Insectes stérilisés	Analyse mathématique

TAB. 4.1: Une classification des biens conomiques

- Biens protégés : tous les bénéfices et retombées de leur utilisation peuvent être récupérés par leur producteur ;
- Dans le cas non-protégé, certains bénéfices profitent à d'autres producteurs que celui qui a produit le bien (*spillovers* = externalités). Externalités positives → sous-production (R&D de base) ; externalités négatives → surproduction (pollution. D'où la nécessité de la régulation publique.
- Les biens dont l'utilisation est rivale doivent être produite chaque fois qu'elles sont vendues.
- Quand c'est non-rivale, un seul exemplaire peut être suffisant → ils ont en général un coût fixe important et des coûts marginaux nuls. Les idées font partie de ce type de biens (ex. logiciel). Si lo coût marginal n'est pas exactement nul, cela provient nécessairement du fait que le bien non-rivale (logiciel) a un support exclusif (le CD).

b) Utilisation non-rivale → rendements croissants
La fonction de coût d'un bien non-rival :

$$\begin{aligned} C(q) &= F + cq \\ CM(q) &= F/q + c > c = Cm(q) \\ &\Rightarrow CM'(q) < 0, \lim_{q\to\infty} CM(q) = c. \end{aligned}$$

Nous avons donc des rendements d'échelle croissants car chaque unité supplémentaire coûte moins que le coût unitaire moyen des unités déjà produites.

c) rendements croissants → concurrence imparfaite
Concurrence parfaite :

$$\begin{aligned} p = Cm(q) = c < CM(q) \\ \Rightarrow \Pi(q) = (p - CM(q))\,q < 0. \end{aligned}$$

La concurrence parfaite ne permet pas de financer la production de ce type de bien : pas d'innovation si concurrence parfaite ($p =$ le coût exact du CD ne permettrait pas de financer l'investissement en développement).

Or, pas de perspective de profit, pas d'incitation à produire.

4.3 Droits de propriété intellectuelle, la révolution industrielle et la croissance

Voici trois phénomènes dont l'apparition est concomitante (Douglas NORTH – Nobel 1993) : La croissance est un phénomène récent mais les droits de propriété intellectuelle aussi. Or, sans ces droits, aucune assurance de pouvoir rentabiliser son investissement en R&D à travers le marché. D'où l'insuffisance de ce type d'investissement.

Ex. Localisation horizontale des bateaux et le chronomètre (John Harrisson) – le rôle du financement public.

1624 : Statue of Monopolies – Londres. Mais l'application effective seulement au XVIIe siècle.

4.4 Idées et statistiques

Comment mesurer les inputs et les outputs de la production d'idées ?
R&D → Innovations (idées) →brevets.
Mais

- c'est une mesure quantitative (manque la valeur des brevets...)
- et cela sous-estime l'outputs car le secret est une source de protection non-négligeable.

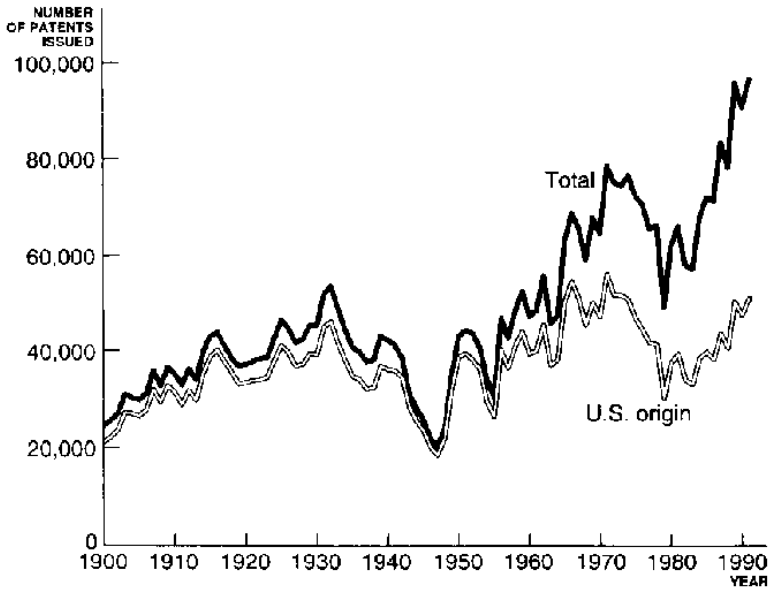
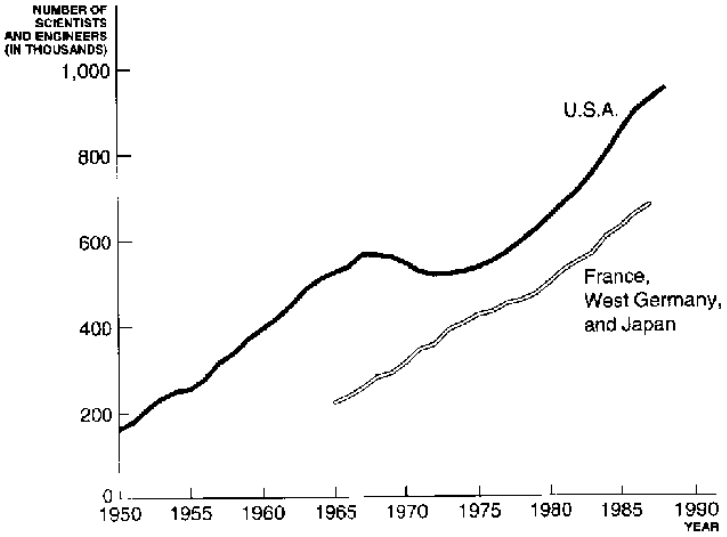


FIG. 4.1: Brevets obtenus aux E.U. 1900-91



SOURCE: Jones (1995a).

FIG. 4.2: Chercheurs et ingénieurs dans la R&D, 1950-88

Chapitre 5

Le moteur de la croissance

D'où vient le progrès technique qui est sous-jacent à la croissance économique ? Les théories de la *croissance endogène* cherchent à répondre à cette question.

Ces modèles introduisent notamment une idée simple : le progrès technique résulte de la recherche de profit des inventeurs et des firmes. Par conséquent, il résulte du fonctionnement même de l'économie. C'est cette idée que Paul Romer a développé dans les années 80-90.

5.1 Éléments de base du modèle

Le modèle de Romer endogénéise le progrès technique en introduisant la recherche de nouvelles idées par des inventeurs intéressés par les profits qu'ils peuvent obtenir grâce à leur innovation.

Le modèle vise à expliquer pourquoi les pays développés bénéficient d'une croissance soutenue. Ce modèle décrit les pays développés du monde dans leur ensemble. Le progrès technique résulte de la recherche-développement effectué dans l'ensemble du monde développé.

Comme dans le modèle de Solow, il y a deux éléments fondamentaux dans le modèle de croissance endogène de Romer : une équation décrivant la fonction de production et un ensemble d'équations décrivant la manière dont les inputs évoluent dans le temps.

La fonction de production agrégée

$$Y = K^{\alpha} (AL_Y)^{1-\alpha}, \tag{5.1}$$

où α est un paramètre compris entre 0 et 1. L_Y est le travail consacré à la production.

Pour un niveau donné de la technologie, A, cette fonction de production a des rendements constants en K et en L_Y. Mais, si l'on considère que les idées (A) sont aussi un facteur de production, la technologie a des rendements croissants :

$$F(tK, tA, tL) = (t^{\alpha} K^{a}) \cdot \left(t^{1-\alpha} A^{1-\alpha}\right) \cdot \left(t^{1-\alpha} L_Y^{1-\alpha}\right)$$
$$F(tK, tA, tL) = t^{2-\alpha} \cdot F(K, A, L) > t \cdot F(K, A, L).$$

Comme nous l'avons déjà vu, la présence des rendements croissants résulte de l'utilisation non-rivale des idées.

Les équations d'accumulation du capital et du travail sont similaires à celles du modèle de Solow :

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K,$$
$$\frac{\dot{L}}{L} = n.$$

L'équation clé est celle décrivant l'évolution du progrès technique. Dans le modèle néo-classique, le terme de productivité A croît à un taux constant de manière exogène. Dans le modèle de Romer, l'évolution de A est endogénéisée. $A(t)$ est le stock des idées qui ont été inventées jusqu'au moment t. Par conséquent $\dot{A}$ donne le nombre de nouvelles idées inventées à chaque moment.

Dans la version la plus simple du modèle, nous avons

$$\dot{A} = \tau L_A \tag{5.2}$$

où L_A est le nombre de personnes consacrant leur temps à la recherche de nouvelles idées et τ est le taux auquel ils trouvent de nouvelles idées. Par conséquent,

$$L = L_Y + L_A. \tag{5.3}$$

D'autre part, τ peut dépendre (positivement ou négativement) des idées déjà trouvées

$$\tau = A^{\phi}, \quad \phi < 1, \tag{5.4}$$

et la productivité moyenne de la recherche peut dépendre du nombre de personnes qui consacrent leur temps à la recherche et développement. Cela revient à considérer que ce qui entre dans la production de nouvelles idées n'est pas L_A, mais L_A^{λ}, où $\lambda \in [0,1]$ traduit la duplication des efforts de recherche. Ainsi l'évolution du stock de connaissances est donnée par :

$$\dot{A} = \rho \cdot L_A^{\lambda} \cdot A^{\phi}. \tag{5.5}$$

Les équations $(5.4 - 5.5)$ montrent un aspect très important des modèles de croissance économique. Les chercheurs individuels, qui sont petits comparés au reste l'économie, prennent τ comme une donnée, et observent des rendements constants dans la recherche.

Dans l'équation (5.2), un chercheur produit τ nouvelles idées. Au niveau global, la fonction de production de nouvelles idées n'a pas nécessairement des rendements constants (équation (5.5) : même si τ varie très faiblement face aux actions d'un chercheur individuel, il réagit très clairement aux variations de la recherche totale. Exemples :

- $\lambda < 1$: externalités associées à la duplication (congestion) ;
- $\phi > 0$: "être sur les épaules des géants" (Newton) – externalités positives dans la recherche.

5.1.1 Croissance dans le modèle de Romer

Quel est le taux de croissance le long du SCE dans ce modèle ?

Si une fraction constante de la population est employée à la production des idées, ce modèle arrive à la même conclusion que le modèle néo-classique : toute la croissance per capita et due au progrès technique. Ainsi devons-nous avoir

$$\gamma_y = \gamma_k = \gamma_A$$

comme dans le modèle de Solow avec progrès technique.

Quel est le taux du progrès technique le long du SCE ? Pour répondre à cette question, nous devons partir de l'équation (5.5)

$$\frac{\dot{A}}{A} = \rho \frac{L_A^{\lambda}}{A^{1-\phi}}. \tag{5.6}$$

Or, le long du SCE nous devons avoir $\dot{A}/A \equiv \gamma_A = Cste$. Cela n'est possible que si le numérateur et le dénominateur de l'équation (5.6) augmentent à la même vitesse, c'est-à-dire

$$0 = \lambda \frac{\dot{L}_A}{L_A} - (1-\phi)\frac{\dot{A}}{A}. \tag{5.7}$$

De plus, le long du SCE, nous devons avoir $\dot{L}_A/L_A = \dot{L}/L = n$. Ce qui nous donne

$$\boxed{\gamma_A = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda n}{1-\phi}} \tag{5.8}$$

Le taux de croissance de long terme de l'économie est par conséquent déterminé par les paramètres de la fonction de production des idées et le taux de croissance de population.
Cas particulier :

$$\lambda = 1, \phi = 0 \Rightarrow \tau = \rho, \quad \dot{A} = \rho L_A$$

si L_A est constant, la somme de nouvelles idées créées à chaque période est constante et la part de nouvelles idées dans le stock total diminue avec le temps. Par conséquent, $\dot{A}/A = 0$. La croissance soutenue n'existe que si le nombre de nouvelles idées créées à chaque période est croissant. Cela est possible si la population affectée à la recherche est croissante ou, si la population totale augmente :

$$\gamma_y = \gamma_A = n.$$

Ce résultat est similaire à celui du modèle de Solow avec progrès technique. Mais le mécanisme qui est derrière ce résultat est bien différent car il passe par la création endogène de nouvelles idées : une population plus importante génère plus d'idées, et comme l'utilisation des idées est non-rivale, tout le monde en profite.

Remarque 2 *Le modèle suggère que si la croissance de population s'arrête, la croissance économique doit s'arrêter aussi. De plus, si l'effort de recherche reste constant, cela devrait conduire aussi à une croissance nulle. Un effort de recherche constant ne peut pas soutenir les augmentations proportionnelles du stock de connaissances nécessaires à la croissance de long terme.*

Remarque 3 *Un cas particulier élimine ce résultat et cela correspond à la fonction de production des idées du modèle originel de Romer (1990) :* $\lambda = 1$ *et* $\phi = 1$

$$\dot{A} = \rho L_A A \Rightarrow \frac{\dot{A}}{A} = \rho L_A$$

et donc la croissance est possible même avec un effort constant de recherche car la productivité de recherche $\tau = \rho A$ *est croissant dans le temps même si le nombre de chercheurs est constant. Même s'il est séduisant, cette idée de Romer est en contradiction avec les faits car les taux de croissance des économies occidentales n'ont pas considérablement augmenté pendant le siècle dernier malgré une croissance très forte de l'effort de recherche et de développement. Ce résultat empirique implique* $\phi < 1$, *comme nous l'avons supposé.*

Remarque 4 *Dans tous les cas de figure, des politiques économiques ne peuvent influencer le taux de croissance d'une telle économie car aucune des variables figurant dans l'équation* (5.8) *n'est influencée par les politiques habituelles malgré le fait que le progrès technique soit maintenant endogène.*

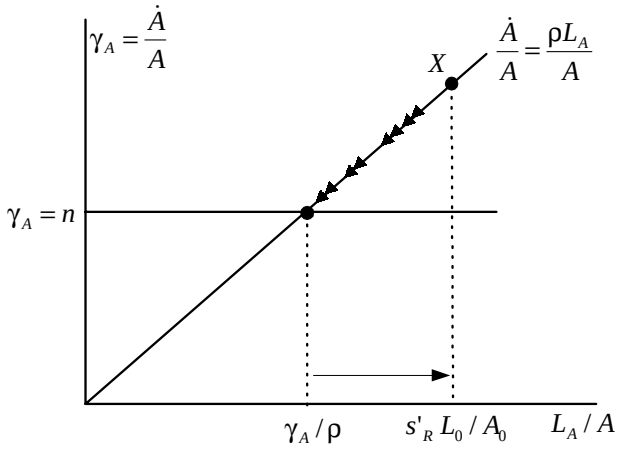
5.1.2 Statiques comparative

Quelle serait l'influence d'une augmentation permanente de la part des chercheurs dans la population sur l'évolution des économies avancés suite, par exemple, à des aides publiques visant à augmenter l'effort de R&D ?

Supposons : $\lambda = 1$ et $\phi = 0$. Réécrivons l'équation 5.6

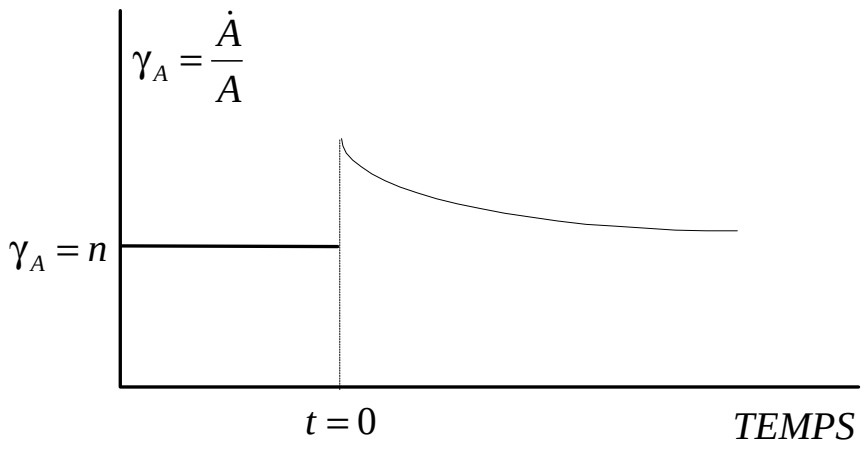
$$\frac{\dot{A}}{A} = \rho \frac{s_R L}{A} \tag{5.9}$$

où s_R est la part de la population engagée en R&D $(L_A = s_R \cdot L)$. La situation que nous considérons correspond donc à une augmentation de s_R.



SCE initial : $\gamma_A/\rho = L_0/A_0$. $s_R \nearrow$ en $t_0 \Rightarrow L_A/L \nearrow, L_A/A \nearrow (X)$.
Mais en X, $\gamma_A = \dot{A}/A > n$ donc $L_A/A \searrow$ jusqu'à ce que l'économie revient à $\gamma_A = n$.

Par conséquent l'effet d'une augmentation permanente de s_R est transitoire :

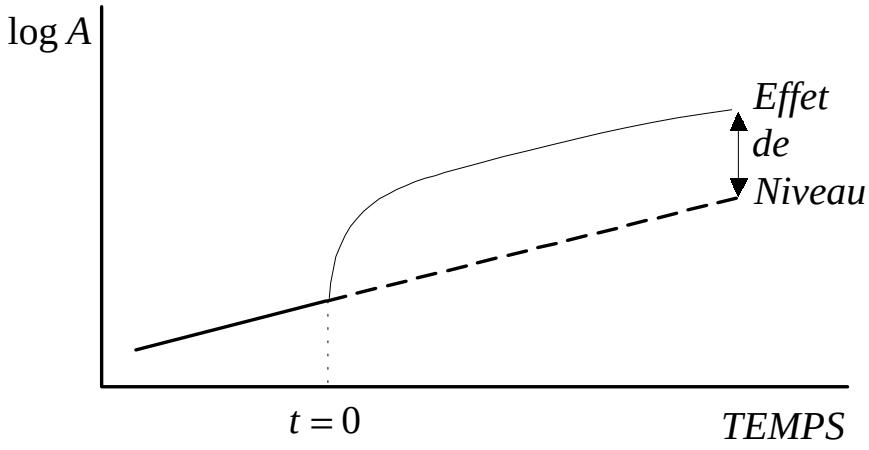


Mais alors que devient le niveau technologique de l'économie ?

. Dynamiques de transition similaires à celles du modèle de Solow suite à une augmentation de s.

. Étant donné que le taux de croissance est constant, nous devons notamment avoir y/A constant

$$\left(\frac{y}{A}\right)^* = \left(\frac{s_K}{n + \gamma_A + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1 - s_R) \tag{5.10}$$



Le long d'un SCE, l'équation (5.9) peut être résolu pour A

$$A = \frac{\rho s_R L}{\gamma_A}$$

et cela donne avec l'équation (5.10)

$$y^*(t) = \left(\frac{s_K}{n+\gamma_A+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1-s_R)\frac{\rho s_R}{\gamma_A} L(t) \tag{5.11}$$

$$y^*(t) = \mu \cdot L(t) \tag{5.12}$$

Effet d'échelle : une économie mondiale plus grande est aussi une économie plus riche.

Cela provient de la nature non-rivale des idées : une économie plus grande correspond à un marché plus grand pour une idée et donc à un rendement plus grand (effet de demande). De plus, une économie peuplée de plus d'individus bénéficient de plus d'inventeurs et donc crée plus d'idées (effet d'offre).

5.2 Mécanismes économiques du modèle

Romer introduit la concurrence imparfaite dans un cadre d'équilibre général (fondements microéconomiques de la macroéconomie).

Il y a trois secteurs dans le modèle de Romer : les secteurs du bien final, du bien intermédiaire et de la recherche. La production des idées et des biens est séparée. Le secteur intermédiaire est nécessaire du fait de la présence des rendements croissants.

Une firme du secteur de la recherche produit de nouvelles idées. Elle vend le droit exclusif de produire un bien capital spécifique à une firme du secteur intermédiaire. Cette dernière obtient alors une position de monopole sur ce bien-capital, le produit et le vend au secteur du bien final qui produit l'output.

5.2.1 Secteur du bien final

Un grand nombre de firmes concurrentielles qui produisent un bien homogène à partir du capital et du travail. La fonction de production reflète la présence de plusieurs biens-capitaux dans le

modèle :

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A} x_j^{\alpha}$$

x_j sont des biens-capitaux (intermédiaires). A est le nombre total de biens intermédiaires disponibles dans l'économie à chaque moment. L'invention d'une nouvelle idée correspond à la création d'un nouveau bien-capital. On peut aussi écrire cette fonction de production sous la forme :

$$Y = L_Y^{1-\alpha} x_1^{\alpha} + L_Y^{1-\alpha} x_2^{\alpha} + \cdots + L_Y^{1-\alpha} x_A^{\alpha}$$

Donné A, cette fonction a des rendements d'échelle constants. Pour des raisons techniques, il vaut mieux remplacer la somme per une intégrale :

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj$$

Alors A mesure la gamme des biens-capitaux disponibles : $[0, A]$. L'objectif des firmes du secteur final (avec $P_Y = 1$) :

$$\max_{L_Y, x_j} L_Y^{1-\alpha} \cdot \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j \cdot x_j^{\alpha} dj$$

Les conditions de premier ordre :

$$w = (1-\alpha) \frac{Y}{L_Y} \tag{5.13}$$

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} \tag{5.14}$$

5.2.2 Secteur du bien intermédiaire

Étant donné le coût d'achat (fixe) d'une nouvelle idée, une unité de capital brut peut être transformée en une unité de bien intermédiaire. L'objectif de la firme intermédiaire est :

$$\max_{x_j} \pi_j = p_j \left(x_j\right) x_j - r x_j$$

Ce qui donne la condition de premier ordre

$$p'(x) x + p(x) - r = 0$$

que nous pouvons réécrire

$$\begin{aligned} p' \frac{x}{p} + 1 &= \frac{r}{p} \\ \Rightarrow p &= \frac{1}{1 + \frac{p'x}{p}} r \\ p &= \frac{1}{\alpha} r. \end{aligned}$$

car $\frac{p'x}{p}$ est l'élasticité de la courbe de demande et peut être calculé à partir de l'équation (5.14). C'est la solution de chaque monopoleur. De plus, en remarquant que $x_j = x$, $\pi_j = \pi$, $\forall j$, le profit devient

$$\pi = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A}. \tag{5.15}$$

car :

$$\begin{aligned}
p &= \alpha L_Y^{1-\alpha} x^{a-1} = \frac{\alpha}{x}\frac{Y}{A} \\
r &= \alpha p \Rightarrow \pi = (p-r)x = p(1-\alpha) \\
\pi &= \frac{\alpha}{x}\frac{Y}{A}(1-\alpha)x = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A}.
\end{aligned}$$

Finalement, la demande de capital des firmes intermédiaires doit être égal au stock de capital total de l'économie

$$\int_0^A x_j dj = K$$

Comme chaque bien-capital est utilisé avec le même montant, x,

$$x = \frac{K}{A} \tag{5.16}$$

On peut alors écrire la fonction de production du secteur de bien final comme étant

$$Y = AL_Y^{1-\alpha} x^{\alpha}$$

Ce qui donne avec l'équation (5.16)

$$Y = AL_Y^{1-\alpha} A^{-\alpha} K^{\alpha} = K^{\alpha}(AL_Y)^{1-\alpha}$$

On retrouve donc la même fonction de production agrégée que dans le reste du cours (équation (5.1)).

5.2.3 Secteur de la recherche

Une nouvelle idée correspond à une nouvelle manière de transformer une unité de capital brut en une unité de bien intermédiaire. Les nouvelles idées sont découvertes au rythme donnée par l'équation (5.5). Quand une nouvelle idée est découverte, son inventeur obtient un brevet qui lui donne l' exclusivité sur cette idée pour toujours.

L'inventeur vend le brevet à une firme du secteur intermédiaire et utilise ce revenu pour consommer et épargner comme tous les autres agents dans l'économie. Mais à quel prix doit-il vendre ce brevet ?

Tout le monde peut participer aux enchères pour acheter un brevet (et donc une position de monopole sur le secteur intermédiaire). Le prix maximal que chacun est prêt à payer est donné par la valeur actualisée des profits d'une firme du secteur intermédiaire. Si l'on propose un prix inférieur, quel qu'un d'autre obtiendra le brevet. Soit donc P_A cette valeur actualisée et donc le prix d'une nouvelle idée.

Comment ce prix varie-t-il dans le temps ? Pour répondre à cette question il faut suivre un argument basé sur le principe d'*arbitrage*. L'arbitrage dans l'épargne doit se faire entre l'achat d'une unité de capital qui rapporte r et l'achat d'un brevet qui donne droit à des profits pour la période et

que l'on peut vendre à la fin de la période. A l'équilibre les deux rendements devraient être égaux. Sinon tout le monde se retournerait vers l'option la plus avantageuse et réduirait le rendement de celle-ci. D'où l'*équation d'arbitrage* de ce modèle

$$rP_A = \pi + \dot{P}_A. \tag{5.17}$$

En réécrivant cette équation

$$r = \frac{\pi}{P_A} + \frac{\dot{P}_A}{P_A}$$

Or le long du SCE, r doit être constant (du fait de la proportionnalité entre l'offre de capital et Y/K) ainsi que $\dot{P}_A/P_A$. Par conséquent, P_A doit varier dans le même sens et à la même vitesse que π. Donc l'équation d'arbitrage implique :

$$P_A = \frac{\pi}{r-n} \tag{5.18}$$

ce qui nous donne le prix d'un brevet le long du SCE.

5.2.4 Résoudre le modèle

Ce modèle possède plusieurs particularités :

1. La fonction de production a des rendements d'échelle croissants ;
2. Ces rendements croissants impliquent une concurrence imparfaite (monopoles) dans le secteur intermédiaire. Ces monopoles vendent le bien intermédiaire à un prix supérieur au coût marginal $(p = r/\alpha > r)$. Mais tout leur profit est transmis aux inventeurs (secteur de la recherche) en vue d'inciter ces derniers à passer du temps à chercher de nouvelles idées (*concurrence monopolistique*). Il n'y a pas de profits économiques dans ce modèle, toutes les rentes servent à financer les facteurs de production.
3. Étant donné la concurrence imparfaite, il n'y a aucune raison pour que l'équilibre corresponde à un optimum social.

Il nous reste à résoudre le modèle pour déterminer l'allocation de la population entre le secteur de recherche et le secteur final (s_R).

On va encore utiliser un argument d'arbitrage : A l'équilibre, les individus devraient être indifférent entre travailler dans le secteur final et recevoir leur productivité marginale comme salaire

$$w_Y = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

et travailler dans le secteur de la recherche. Dans ce dernier cas ils considèrent que leur productivité est une donnée (ignorent l'effet de A sur $\dot{A}$ à travers λ et ϕ). Ils reçoivent alors leur produit marginal comme salaire

$$w_R = \tau P_A.$$

L'équilibre implique donc

$$w_Y = w_R \tag{5.19}$$

$$\tau P_A = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

$$P_A = \frac{\pi}{r-n} \Rightarrow \tau\frac{\pi}{r-n} = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

$$\pi = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A} \Rightarrow \frac{\tau}{r-n}\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A} = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

$$\frac{\alpha}{r-n}\frac{\tau}{A} = \frac{1}{L_Y}$$

$$\gamma_A = \dot{A}/A = \frac{\tau L_A}{A} \Rightarrow \frac{\alpha\gamma_A}{r-n} = \frac{L_A}{L_Y} = \frac{s_R}{1-s_R}$$

$$\boxed{s_R = \frac{1}{1+\frac{r-n}{\alpha\gamma_A}}} \tag{5.20}$$

Par conséquent, une croissance plus rapide est corrélée avec une proportion plus importante de la population dans le secteur de la recherche. De plus $r = \alpha^2 Y/K < Pm_K = \alpha Y/K$: le prix du capital est donc inférieur à sa productivité marginale. Cela provient du fait que si ce prix est égal à Pm_K comme dans le modèle de Solow, nous avons

$$wL + rK = Y \quad \text{(identité d'Euler)}$$

donc il n'y a aucun output pour récompenser les individus qui ont cherché de nouvelles idées (revenu de A).

L'existence des rendements croissants ne peut être pris en compte dans l'équilibre concurrentiel et la concurrence imparfaite (dans le secteur intermédiaire) est nécessaire pour payer le capital moins que sa productivité marginale et de financer avec le reste la création de nouvelles idées.

5.3 Niveau optimal de R&D

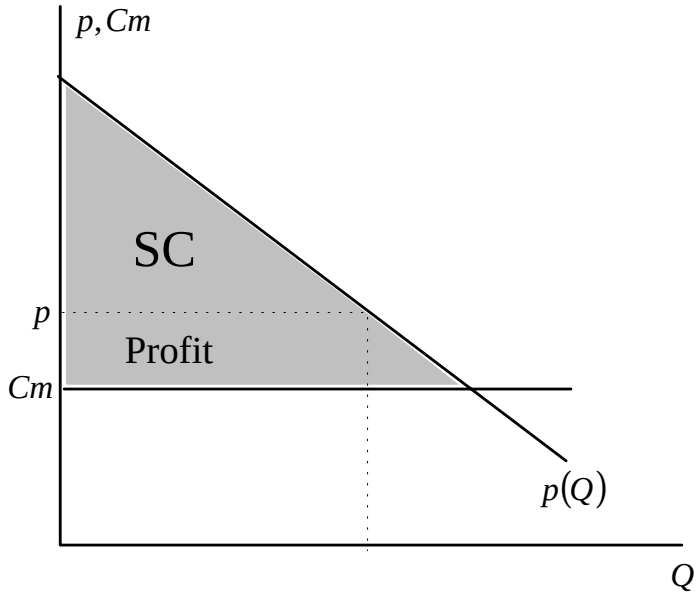
Est-ce que la proportion de la population qui travaille dans le secteur de la recherche est socialement optimal ?

La réponse est négative du fait de la présence des externalités dans la recherche d'idées :

- Quand $\phi > 0$, le marché ne tient pas compte du fait que la productivité de la recherche est croissante avec le stock déjà découvert et les chercheurs ne sont pas récompenses pour avoir augmenté la productivité des chercheurs futurs (effet *épaules des géants*) : le marché sous-incite à la recherche ;
- Quand $\lambda < 1$, le marché ne pénalise pas les chercheurs qui réduisent la productivité des autres chercheurs (effet *marcher sur les pieds*) : le marché sur-incite à la recherche.
- Le marché ne tient pas compte du fait que la création d'un nouveau marché est aussi une source de surplus pour les consommateurs (effet *surplus des consommateurs*). Les chercheurs ne reçoivent que les profits : le marché sous-incite à la recherche

Les évaluation empiriques soulignent un sous-investissement en R&D et donc, empiriquement, les externalités positives dominent les externalités négatives et le marché sous-incite à la recherche.

Ce modèle montre aussi que quand on cherche à éliminer les monopoles en se basant sur le surplus statique des consommateurs, on néglige l'effet positif (dynamique) de la concurrence imparfaite *via* la création de nouvelles idées.


p, Cm
SC
p
Profit
Cm
p(Q)
Q

Chapitre 6

Croissance et développement

Solow : ‘Richesse’avec accumulation et technologie exogènes
Romer : Évolution de la frontière technologique → le moteur de la croissance
Comment se diffusent les technologies entre les pays ?
Pourquoi certain pays ont des technologies plus avancées que les autres ?

6.1 Modèle de base

Modèle de Romer + transfert de technologie.

Les pays produisent un bien homogène, Y, en utilisant le travail L et une gamme de biens-capitaux x_j. Cette gamme est limitée par le niveau de la **qualification** de la main d'oeuvre, h

$$Y = L^{1-\alpha} \int_0^h x_j^{\alpha} dj. \tag{6.1}$$

Une qualification plus élevée permet d'utiliser une gamme plus large de biens-capitaux.

Contrairement au chapitre 5, nous étudierons ici le performance d'un petit pays qui est encore loin de la frontière technologique de l'économie mondiale. La croissance dans ce pays est assurée par l'apprentissage de l'utilisation des outils plus avancés qui sont déjà utilisés dans le reste du monde.

De nouveau, une unité de capital brut est nécessaire pour produire une unité de bien-capital. Par conséquent, à un moment t donné

$$\int_0^{h(t)} x_j(t)\, dj = K(t) \tag{6.2}$$

Les biens intermédiaires seront de nouveau traîtés de manière symétrique $\left(x_j = x = K/h, \forall j\right)$. Ce qui conduit à la fonction de Cobb-Douglas habituelle

$$Y = K^{\alpha} (hL)^{1-\alpha} \tag{6.3}$$

où le niveau de qualification renforce le travail.

Le capital est accumulé en sacrifiant la consommation

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K.$$

L'accumulation des savoir-faire sera différente de celle du Chapitre 3 en vue de respecter la définition particulière que nous en utilisons dans ce chapitre

$$\dot{h} = \mu \cdot e^{\psi u} \cdot A^{\lambda} h^{1-\lambda}. \tag{6.4}$$

où
u représente le temps consacré par l'économie à l'accumulation des savoir-faire.
A représente la frontière technologique mondiale. Il correspond à l'indice du bien-capital le plus avancé.
Nous supposons $\mu > 0$ et $0 < \lambda \leq 1$.

Le terme exponentiel est justifié empiriquement (Nelson & Phelps (1966)).
Le dernier terme :
la variation de la qualification est une moyenne géométrique de la frontière technologique et de la propre qualification du pays.

En divisant les deux membres de cette équation par h

$$\gamma_h = \frac{\dot{h}}{h} = \mu e^{\psi u} \left(\frac{A}{h}\right)^{\lambda} \tag{6.5}$$

Quand le pays est proche de la frontière technologique, le croissance de son niveau de qualification ralentît.

La frontière technologique évolue grâce à l'investissement en R&D dans les pays avancés. Du point de vue du petit pays, elle avance à un taux constant

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma.$$

Dans ce modèle, il n'y a pas d'investissement explicite en R&D. Nous supposons qu'il existe une réservoir d'idées librement disponibles pour tous les pays, mais qu'un pays qui n'apprend pas d'abord l'utiliser ne peut profiter d'une nouvelle idée.

6.2 L'analyse du SCE

Nous supposerons s_K constant et un taux de croissance démographique de n. Le long du SCE, le taux de croissance de h doit être constant (équation (6.5)). Comme h entre dans la fonction de production en renforçant le travail, le taux de croissance de h va déterminer celui de y et de k. A partir de l'équation (6.5), on voit que $\dot{h}/h$ ne sera constant que si A/h est constant. Nous devons donc avoir

$$\gamma_y = \gamma_k = \gamma_h = \gamma_A = \gamma \tag{6.6}$$

De manière maintenant habituelle, nous pouvons déterminer

$$\left(\frac{K}{Y}\right)^* = \frac{s_K}{n+\gamma+\delta}$$

Ce qui, une fois intégré dans l'équation (6.3), nous donne

$$y_t^* = \left(\frac{s_K}{n+\gamma+\delta}\right)^{\alpha/1-\alpha} h_t^* \tag{6.7}$$

où $(*)$ est utilisé pour indiquer les valeurs de SCE. Si l'on intègre l'équation (6.6) dans l'équation (6.5), nous obtenons le résultat suivant :

$$\gamma_h = \gamma \Rightarrow \left(\frac{h}{A}\right)^* = \left(\frac{\mu}{\gamma} e^{\psi u}\right)^{1/\lambda}$$

Quand les agents consacrent plus de temps à l'accumulation des savoir-faire, l'économie est plus proche de la frontière technologique sur son SCE. En utilisant cette valeur de h/A dans équation (6.7), nous avons l'évolution de y sur le SCE

$$y_t^* = \left(\frac{s_K}{n+\gamma+\delta}\right)^{\alpha/1-\alpha} \cdot \left(\frac{\mu}{\gamma}e^{\psi u}\right)^{1/\lambda} \cdot A_t \tag{6.8}$$

Ce qui nous donne tous les déterminants de la richesse de cette petite économie et l'équation (6.6) nous donne l'évolution de cette richesse sur le SCE : cette évolution suit celle de la frontière technologique. Dans le Chapitre 3, nous avions obtenu pour la dynamique de y

$$y_t^* = \left(\frac{s_K}{n+\delta+g}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot h \cdot A_t.$$

L'équation (6.8) ouvre donc la *boîte noire* qui apparaissait sous la forme de h dans cette équation. Elle donne donc une nouvelle interprétation de la croissance dans les termes de "Nouvelles théories de la croissance" : les économies ont de la croissance car elles apprennent à utiliser les nouvelles idées inventées dans le Monde.

Le modèle explique maintenant pourquoi les différents pays ont des niveaux technologiques différents. Si les agriculteurs utilisent des ordinateurs et des fertilisants très spécifiques en France et des techniques ancestrales en Inde ou en Afrique sub-Saharienne, c'est parce que les niveau de compétence des travailleurs en France est beaucoup plus élevé et cela, grâce à un investissement en éducation considérable. Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur cette différence de stratégies entre les pays.

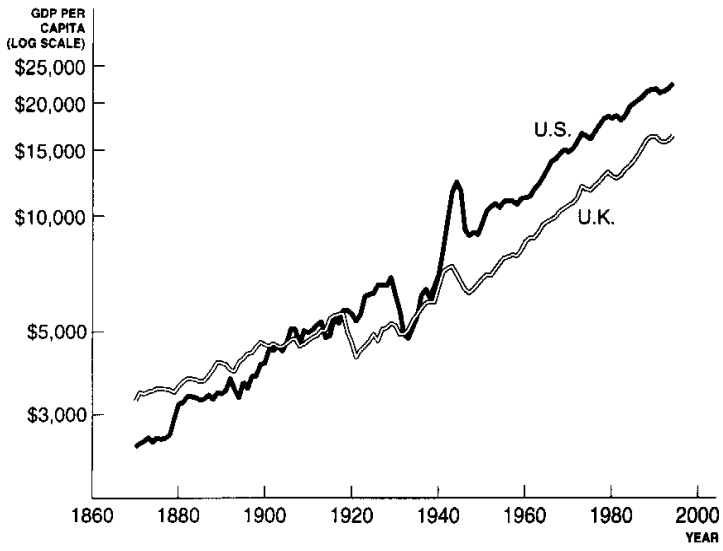
Le modèle suppose aussi que les technologies peuvent diffuser rapidement entre les pays. Cela est actuellement le cas du fait de la mondialisation et des firmes multinationales qui domine l'économie mondiale depuis les années 70. Ce qui limite la diffusion est la *capacité d'absorption* des pays et non l'impossibilité d'accéder aux nouvelles technologies. Une autre limitation potentielle correspond biensûr aux brevets internationaux. Mais étant donné que le coût du brevet peut être considéré comme un coût fixe additionnelle (en plus du coût de la R&D), il est beaucoup plus intéressant de produire ensuite pour le marché mondiale que pour une petite économie. Ce qui encourage encore plus la recherche.

6.3 Comprendre les différences

Une autre conséquence de l'équation (6.8) est la suivante : à long terme toutes les économies doivent avoir le même taux de croissance, le taux d'expansion de la frontière technologique mondiale. Cela est dû à la diffusion des technologies : même si cela prend longtemps, aucune économie ne reste en arrière définitivement.

Or nous savons que les taux de croissance varient entre les pays (voir Chapitre 1, Fait 2). Est-ce que ce fait contredit ce modèle ? La réponse est négative. Car cette variation est à expliquer par les *dynamiques de transition*. Dans la mesure où les pays changent leur position dans la distribution de revenu de long-terme, ils peuvent avoir des taux de croissance différents : les pays qui sont loin de leur SCE croîtront plus rapidement que ceux qui en sont près. Un choc externe sur le stock de capital (une guerre) où un changement de politique peut transitoirement éloigner un pays de son SCE.

La figure suivante montre l'évolution du log du PIB/tête du Royaume-Uni et des États-Unis pendant les 125 dernières années.



SOURCE: Maddison (1995).

Revenus 1870-1994 : RU et EU

Sur la totalité de la période le taux de croissance des EU était, en moyenne, 0.5 point supérieur à celui du RU. Mais la figure montre que cette différence a surtout eu lieu avant 1950, le temps que les EU dépasse RU et devienne le leader. Depuis cette date la croissance est similaire dans les deux pays ($1.95/an$ pour EU et $1.98/an$ pour RU).

La signification des différences de taux de croissance, même sur le long terme, doit donc être analysée avec beaucoup d'attention. Le fait que le Japon a eu une croissance plus rapide que les EU pendant les quarante dernières années donne en fait assez peu d'information sur les taux de croissance de long terme de ces économies.

Différemment dans le modèle néo-classique, les dynamiques de transition dans ce modèle dépendent aussi des caractéristiques de la diffusion de la technologie (l'équation (6.4)). Si une économie décide de s'ouvrir plus au reste du monde en réduisant les barrières douanières, cela peut augmenter l'absorption de nouvelles technologies par lui (correspondant, par exemple, à une augmentation de μ). Or, l'équation (6.8) montre qu'une augmentation de μ conduit à un PIB/tête de long terme plus élevé. Le pays se trouverait donc sous son SCE et cela pourrait expliquer un taux de croissance élevé pendant la transition vers le nouveau SCE.

Chapitre 7

Infrastructure et performance économique de long terme

Hypothèse des modèles analysés :
Les taux d'investissement et la fraction du temps consacré à la formation sont exogènes.
Mais un résultat de ces modèles :
Plus un pays investit en capital physique et en capital humain, plus il est riche.
Question :
Pourquoi certains pays investissent-ils plus consacrent-ils plus de temps à la formation ?
Il n'existe pas de réponse consensuelle à cette question.
Il faut reconsidérer les motivations de ce type de décisions.

7.1 Un problème d'investissement

La décision d'investissement résulte souvent d'une analyse coût avantage. Si la valeur actualisée du flux de profits futurs est notée par Π, et le coût d'installation de l'investissement est F, ce problème peut être décrit de manière simple :

$$\Pi \geq F \rightarrow Investissement$$
$$\Pi < F \rightarrow Non.$$

Ce type de démarche peut aussi caractériser les décisions des multinationales quand elles décident d'installer une nouvelle unité dans un pays et donc le transfert de technologie peut en dépendre.

De même, le temps consacré à la formation peut résulter de la comparaison des coûts (directs et indirects) et bénéfices de la formation.

Par conséquent ce sont les variations de Π et de F d'un pays à l'autre qui doivent expliquer pourquoi certains sont riches et certains sont pauvres.

Un des éléments fondamentaux qui déterminent ces éléments correspond aux politiques économiques d'infrastructure retenues par les différents pays : un gouvernement qui favorise les institutions qui minimisent F et maximisent Π encourage nécessairement l'investissement dans le pays et donc la croissance.

7.2 Déterminants de F et de Π

Investir dans un pays étranger revient souvent à livrer les investissements effectués aux autorités de ce pays (problème d'*otage*).

Si un bureaucrate corrompu peut demander un pot-de-vin proche de Π en vue de permettre l'installation, cela augmente considérablement F et réduit donc l'attrait de l'investissement. Ce problème concerne surtout les pays en voie de développement justement parce qu'il est négligeable dans les pays développés.

Π est surtout déterminé par trois facteurs :

1. la taille du marché ;
2. la mesure dans laquelle l'économie favorise la production ;
3. la stabilité de l'environnement économique.

Par conséquent, l'infrastructure d'une économie va fortement déterminer la nature des investissements qui seront effectués dans le pays. Les choix politiques de long terme concernant la nature de cette infrastructure vont alors directement conditionner la croissance de manière à produire des *miracles* de la croissance et les *désastres*.

Jusqu'au lendemain de la seconde guerre mondiale, le revenu du Japon était à peine le quart de celui des États-Unis. Après la seconde guerre, le Japon a mis en place des réformes radicales et le revenu japonais a augmenté de manière considérable pour s'approcher des revenus américains.

De même, à la fin du 19e siècle, l'Argentine faisait parti du peloton de tête des pays riches et en 1988 le revenu argentin ne faisait plus que 42% du revenu américain. Les *réformes* politiques désastreuses sont à l'origine de cette performance calamiteuse.

Il est néanmoins possible de montrer empiriquement que les *désastres* de la croissance sont de plus en plus rares par rapport aux *miracles*.

On pourrait imaginer que la société humaine est en train de découvrir des politiques et institutions qui conduisent à des performances économiques supérieures et que ces découvertes diffusent progressivement dans le Monde.

Chapitre 8

Théories alternatives de croissance endogène

Jusqu'à maintenant, nous avons développé une explication progressive et cohérente de la croissance endogène en focalisant sur un ensemble de modèles relativement proches. Mais d'autres modèles, basés sur d'autres mécanismes et débouchant sur différents résultats ont été développés dans la dernière décennie.

Les modèles que nous avons analysés impliquent tous que les changements de politiques publics (comme les subsides à la R&D ou les impôts sur l'investissement) ont des effets de niveau mais pas d'effet de croissance de long terme : les taux de croissance retournent à long terme à leur niveau initial.

Initialement, le terme de "croissance endogène" avait été inventé pour qualifier les modèles dans lesquels ce type de politiques pouvaient influencer les taux de croissance de manière permanente. Les différences entre les taux de croissance des différents pays étaient considérées résulter, dans ces modèles initiaux, des différences permanentes entre les taux de croissance sous-jacents. Ce n'est pas l'explication que nous avons retenue dans nos modèles. Ces pour cette raison que ces derniers sont parfois appelés les "modèles de croissance semi-endogène". Même si le progrès technique est endogène dans les modèles que nous avons étudiés, sans la croissance (exogène) de la population (et des chercheurs, par exemple), la croissance du PIB/tête finira par s'arrêter. Il est néanmoins important de comprendre le fonctionnement des modèles initiaux (de croissance endogène) et cela fera l'objet de ce chapitre.

8.1 Le modèle "AK"

C'est un des modèles les plus simples qui permettent une croissance endogène (dans le sens où les politiques influencent les taux de croissance).

Ce modèle peut être dérivé très facilement de celui de Solow (chapitre 2) sans progrès technique $\left(\dot{A}/A = 0\right)$ mais avec $\alpha = 1$:

$$Y = AK \tag{8.1}$$

Cette équation donne donc son nom à ce modèle (Romer(1987) et Rebelo (1991)). Elle implique que la production est proportionnelle au stock de capital.

Le capital s'accumule selon l'équation habituelle :

$$\dot{K} = sY - \delta K \tag{8.2}$$

Nous supposerons $n = 0$, pour simplifier (K devient donc aussi le capital/tête en normalisant la population à $N = 1$).

Nous pouvons donc considérer le diagramme de Solow qui se construit de la même manière que dans le chapitre 2.

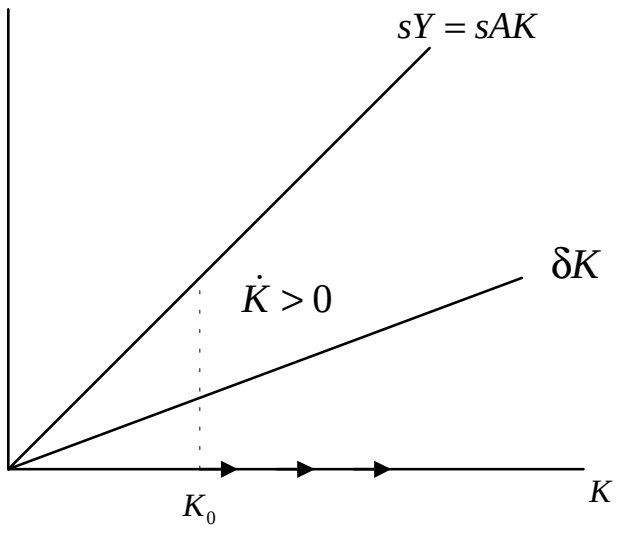


FIG. 8.1: Diagramme de Solow dans le modèle AK

Si au moment de démarrage de l'économie, on a $sY > \delta K$, le stock de capital croît et cette croissance persiste dans le temps : l'investissement total est constamment supérieur à la dépréciation. La croissance ne s'arrête jamais. Comment cela est-il possible ?

Dans le modèle de Solow, chaque unité de capital ajoutée grâce à l'épargne contribue de moins en moins à la production du fait des rendements décroissants $(\alpha < 1)$.

Dans ce modèle, nous avons des rendements constants $(\alpha = 1)$: le produit marginal de chaque unité de capital supplémentaire est toujours A.

On peut clairement voir cela en réécrivant l'équation (8.2) :

$$\gamma_K = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY}{K} - \delta = sA - \delta = Cste \quad \forall K.$$

Et, avec la dérivée logarithmique de la production, on obtient

$$\gamma_Y = \gamma_K = sA - \delta.$$

Le taux de croissance du PIB est une fonction croissante du taux d'investissement. Par conséquent, les politiques publiques qui augmentent ce taux d'investissement augmentent aussi le taux de croissance du PIB et cela, de **manière permanente**.

Ce résultat peut être interprété dans le contexte du modèle de Solow avec $\alpha < 1$. Dans ce cas la droite sY est une courbe est le SCE est atteint en K^* quand $sY = \delta$ (car $n = 0$). Le paramètre α mesure la courbure de sY : quand α est faible alors la courbure est forte et sY croise δ à une valeur faible de K^*. Quand α augmente, la courbure se réduit et l'intersection a lieu pour une valeur plus élevée de K^*. A partir d'un $K_0 < K^*$ initial donné, la transition vers le SCE prend de plus en plus de temps. Le cas $\alpha = 1$ est un cas limite où la dynamique de transition ne s'arrête jamais.

Ainsi, le modèle AK génère la croissance de manière endogène, même si la population ou le niveau technologique ne croît dans le modèle.

8.2 Intuition et autres modèles de croissance

La croissance endogène est causée dans le modèle AK du fait d'une linéarité fondamentale dans une équation différentielle dans le modèle. Cela peut-être observé en combinant la fonction de production et l'équation d'accumulation du capital dans le modèle de Solow (en normalisant la population à un) :

$$\dot{K} = sAK^{\alpha} - \delta K.$$

Quand $\alpha = 1$, cette équation est linéaire en K et le modèle génère une croissance qui dépend de s.

Si $\alpha < 1$, cette équation est non-linéaire (convexe) en K et il y a des rendements décroissants dans l'accumulation du capital. Si nous divisons les deux membres par K, nous observons que le taux de croissance du stock de capital décroît au fur et à mesure que l'économie accumule du capital :

$$\gamma_K = \frac{\dot{K}}{K} = sA\frac{1}{K^{1-\alpha}} - \delta.$$

Un autre exemple du rôle de la linéarité peut être observé en considérant le taux de croissance exogène de la technologie dans le modèle de Solow augmenté :

$$\dot{A} = gA.$$

Cette équation différentielle est linéaire en A et un changement permanent de g augmente de manière permanente le taux de croissance dans le modèle de Solow avec progrès technique exogène. Cela montre aussi la connexion entre la linéarité d'une équation différentielle fondamentale du modèle et la croissance. Mais le concept-clé ici est l'absence des rendements décroissants. Si l'on a par exemple deux équations différentielles dans le modèle et si l'une est convexe mais la concavité de l'autre est plus forte, on peut aussi avoir une croissance endogène (sans qu'il y ait de linéarité).

D'autres modèles de croissance endogène peuvent être créés en se basant sur cette intuition. Par exemple, le modèle de Lucas (1988) utilise une fonction de production similaire à celle du chapitre 3 :

$$Y = K^{\alpha}(hL)^{1-\alpha},$$

où h représente le capital humain par personne. Lucas suppose que ce capital humain évolue selon l'équation suivante

$$\dot{h} = (1-u)\,h$$

où u est le temps consacré au travail et $1-u$, celui consacré à la formation. On voit ici que le temps consacré à la formation augmente le taux de croissance du capital humain

$$\frac{\dot{h}}{h} = 1-u$$

et h entre dans la fonction de production de la même manière que le progrès technique augmentant le travail dans le modèle de Solow. Donc ce modèle fonctionne comme le modèle de Solow mais avec A qui est cette fois-ci le capital humain et $g = 1-u$. Toute politique qui augmente de manière permanente le temps consacré à la formation augmente le taux de croissance du PIB/tête de manière permanente.

8.3 Externalités et les modèles AK

Dans le chapitre 4, nous avons avancé que la présence des idées ou de la technologie dans la fonction de production implique des rendements d'échelle croissants. Alors nous en avons déduit que l'existence de ces rendements croissants nécessite l'introduction de la concurrence imparfaite : si le travail et le capital sont rémunérés à leur productivité marginale, comme cela est le cas dans un monde de concurrence parfaite, il ne reste pas de produit pour récompenser l'accumulation des connaissances.

Or, il existe un moyen pour introduire les rendements d'échelle croissants tout en maintenant la concurrence parfaite dans le modèle. L'argument précédent montre que les individus ne peuvent être récompenses pour leur recherche mais si l'accumulation des connaissance est juste une conséquence involontaire d'autres activités dans l'économie, elle peut quand même avoir lieu. Ainsi, la connaissance peut s'accumuler du fait d'*externalités*.

Considérons une fonction de production Cobb-Douglas pour une firme individuelle

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha}. \tag{8.3}$$

Dans cette équation, les rendements sont constants pour le travail et le capital. Si B était accumulé de manière endogène cela impliquerait des rendements croissants.

Supposons que chaque firme individuelle prenne B comme une donnée mais que l'accumulation du capital génère en réalité de nouvelles connaissances sur la production dans l'économie prise globalement. Supposons donc que

$$B = AK^{1-\alpha} \tag{8.4}$$

où A est une constante. Chaque firme individuelle ne reconnaît pas que son effort d'investissement améliore les connaissances de la société sur la technologie car elle est petite par rapport à la taille de l'économie. Le progrès technique est donc *externe* aux firmes individuelles : il a lieu dans l'économie prise dans sa globalité. Les firmes individuelles n'accumulent pas du capital parce que cela améliore les connaissances, mais parcequ'elles en ont besoin pour produire. Mais cette accumulation améliore quand même les connaissances (*l'apprentissage par l'expérience* – Arrow(1962)).

Par conséquent, le capital est rémunéré à sa productivité marginale privée $\alpha Y/K$. Mais son accumulation résulte dans la création d'un bénéfice non-anticipé mais néanmoins très utile pour la société : de nouvelles connaissances.

En combinant les équations (8.3) et (8.4), on obtient :

$$Y = AKL^{1-\alpha}. \tag{8.5}$$

Si l'on suppose que la population est à nouveau normalisée à un, c'est exactement la fonction de production que nous avons utilisée au début de ce chapitre (l'équation (8.1)).

Pour résumer, il existe deux méthodes pour tenir compte des rendements croissants si l'on veut endogénéiser l'accumulation des connaissances : la concurrence imparfaite et les externalités.

Si l'on abandonne la concurrence parfaite, on peut modéliser l'accumulation des connaissances comme le résultats de l'effort délibéré des chercheurs pour trouver de nouvelles idées.

De manière alternative, on peut supposer que l'accumulation des connaissances et un résultat indirect d'autres activités dans l'économie.

Les ressources consacrées à la R&D dans les firmes industrielles modernes montre clairement que le premier mécanisme est très important empiriquement (Silicon Valley est un autre indicateur). Mais le second mécanisme a joué un rôle très important dans le passé et joue encore un rôle non-négligeable dans les industries modernes.

Notons d'ailleurs que nous avons combiné les deux approches dans le chapitre 5 (le modèle de Romer) : la concurrence imparfaite nous a permis de tenir compte des rendements croissants dans la production et les externalités, des rendements croissants dans la création d'idées quand $\phi > 1$ (l'effet "épaule des géants").

8.4 Évaluation des modèles de croissance endogène

Nous avons donc deux types de modèles : dans les premiers, les politiques ont un effet permanent et dans les seconds, cet effet est seulement transitoire. Quel est le cadre le plus pertinent pour modéliser la croissance ? Les politiques ont-elles un effet permanent sur les taux de croissance des économies ?

A un niveau très global, la réponse doit être positive : les économies industrialisées ont bien vécu des taux de croissance significativement supérieurs dans les deux derniers siècles. Dans le chapitre 4, nous avons exposé l'explication proposée par les historiens de l'économie (Douglas North) : cette croissance était en grande parti due à la généralisation des droits de propriétés qui ont permis aux individus de s'engager dans des projets d'investissement de long terme.

Mais cette explication ne contredit pas le modèle de Romer : si les chercheurs ne peuvent pas récupérer le fruit de leurs efforts, la recherche s'arrête, ainsi que la croissance.

Par conséquent, on doit se placer à un niveau de détail plus fin. Si le gouvernement augmente les subventions pour la recherche ou l'investissement de 10%, cela aura-t-il un effet permanent sur les taux de croissance ou seulement un effet de niveau (sur le PIB) à long terme ? Selon beaucoup de modèles, les taux de croissance augmenteraient bien pendant quelque temps, mais pendant combien de temps ? La réponse pourrait être 5 ans, 10 ans, 50 ans ou indéfiniment. La vrai question est celle-là et non pas celle de la permanence ou non de cet effet. Un effet très long, même s'il est transitoire, peut être très proche d'un effet permanent. Mais l'inverse n'est pas vrai : un effet permanent ne peut jamais approximer la situation d'un effet transitoire qui persiste seulement $5-10$ ans. Le premier type de modèles propose donc un cadre plus général.

La littérature récente propose d'autres raisons de favoriser les modèles où il n'y a que des effets de niveaux à long terme. Premièrement, il n'y a aucune observation empirique qui indique que la dynamique des économies est linéaire $(\alpha = 1)$. La part du capital semble plutôt proche de $\alpha = 1/3$ selon la comptabilité de la croissance. Même si l'on y inclue le capital humain et les externalités, on atteint au plus $2/3$ ou peut-être $4/5$. Mais ce coefficient reste significativement inférieur à un.

La dynamique de la recherche et développement aussi contredit cette linéarité : le nombre de chercheurs a considérablement augmenté les quarante dernières années mais les taux de croissance sont restés proche de 1.8% sur cette période. Cela indiquerait donc la présence d'un $\phi < 1$.

L'expérience américaine du dernier siècle indique aussi le même type de résultat : les facteurs qui jouent un rôle important dans la croissance (capital, éducation, recherche) ont vu leur accumulation s'accélérer considérablement. En 1940, un adulte sur quatre avait un diplôme du secondaire. En 1995, ce taux a atteint 80%. Le nombre de chercheurs a été multiplié par trois depuis 1950. Pourtant les taux de croissance d'aujourd'hui sont à peine plus élevés que ceux de 1870 ou de 1929.

Une dernière indication est obtenue en comparant les conséquences des modèles de croissance endogène pour la comparaison entre les pays. Ces modèles à effet permanent impliquent une différence permanente entre les taux de croissance des pays dès qu'ils ne sont pas parfaitement identiques. Or, entre 1960 et 1988 les EU et le Honduras ont eu à peu près le même taux de croissance : les différences de politiques économiques entre ces pays s'observent bien au niveau de leur PIB, mais non au niveau du taux de croissance de ce PIB.

La croissance *endogène* doit donc être comprise dans le sens qu'elle résulte d'une économie

dans laquelle les individus qui cherchent des opportunités de profits, peuvent obtenir le fruit de leur effort de recherche d'idées nouvelles et plus efficaces. Dans ce sens, elle est le fruit d'une économie de marché capitaliste. Elle n'exclut pas la croissance d'une économie de type planifiée par exemple mais elle ne peut l'expliquer en tant que telle.

Chapitre 9

Comprendre la croissance

L'objectif que nous avons fixé pour ce cours est très ambitieux et concerne l'éclaircissement d'une des questions fondamentales de l'économie : comment expliquer la diversité considérable des revenus et des taux de croissance à travers le monde ? Un ouvrier ethiopien doit travailler un mois et demi pour gagner ce qu'un ouvrier de l'Europe Occidentale gagne en un jour. Un ouvrier japonais gagne dix fois le revenu de ses grands-parents tandis qu'un ouvrier australien ou américain gagne seulement le double de celui des siens. Avec des firmes multinationales qui, depuis plusieurs décennies, déplacent leur production d'un coin à l'autre de la planète pour minimiser les coûts, et un capital financier alloué à travers des marchés globaux, comment peut-on expliquer la persistance de cette diversité ?

Nous avons cherché à éclairer cette *énigme* en cherchant les réponses aux trois questions que nous avons posées au premier chapitre :

- Pourquoi certains pays sont aussi riches et d'autres, aussi pauvres ?
- Quel est le moteur de la croissance ?
- Comment comprendre les "miracles" de la croissance comme la transformation économique rapide du Japon ou de Hong Kong ?

9.1 Pourquoi certains sont riches et d'autres pauvres ?

Le modèle de Solow nous a permis de donner une première réponse : le produit par ouvrier sur le SCE est déterminé par le taux d'investissement en inputs privés comme le capital physique et les qualifications, par le taux de croissance de la main d'œuvre et la productivité de ces facteurs. Cette explication est fortement soutenue par les travaux empiriques.

Les pays *pauvres* n'ont non seulement un niveau faible de capital et d'enseignement mais aussi un niveau faible de productivité dans l'utilisation de ces facteurs.

Mais ces réponses soulèvent d'autres questions. Pourquoi certains pays investissent beaucoup moins que d'autres ? Pourquoi le capital et les qualifications sont utilisés beaucoup moins efficacement dans certains pays ? Nous avons souligné dans le chapitre 7 le rôle très important joué par les institutions, le droit et les politiques publiques. Cette infrastructure détermine l'environnement économique dans lequel les individus produisent et échangent. Si elle encourage la production, l'économie s'enrichit mais si elle encourage la diversion des ressources, les conséquences peuvent être dramatiques. Les pays les plus riches ont trouvé le moyen de limiter cette diversion.

9.2 Quel est le moteur de la croissance ?

Le moteur de la croissance est l'invention.

Au niveau mathématique, le modèle de Solow l'indique déjà : la croissance s'arrête dans ce modèle dès que le progrès technique ralentit. Le modèle de Romer analyse ce moteur avec plus de détail. Les entrepreneurs qui cherchent la fortune qui récompense l'invention créent de nouvelles idées et ces idées mènent le progrès technique.

Une analyse plus fine fait apparaître la nature particulière des idées en tant que biens économiques. L'utilisation d'une idée est non-rivale et cela est une source de rendements d'échelle croissants. Les idées ne peuvent alors être produites par une économie de concurrence parfaite. La concurrence imparfaite permet alors aux firmes de fixer un prix supérieur au coût marginal. Cet écart récompense l'invention et fournit le "fioul" du moteur de la croissance.

9.3 Comprendre les miracles de la croissance

Les revenus réels ont augmenté en moyenne de 5% par an au Japon et à Hong Kong depuis la Seconde Guerre Mondiale, tandis que le taux de croissance était de 1.4% aux EU. Un tel taux de croissance transforme dramatiquement une économie, même sur une période *courte* de cinquante ans.

Ces "miracles" de la croissance reflètent le déplacement d'un pays dans la distribution mondiale des revenus. Quelque chose a eu lieu dans les économies du Japon et de Hong Kong : leur SCE correspondait à un revenu faible comparé à l'Europe et il correspond maintenant à une valeur forte. Le passage de l'état faible à l'état fort nécessite alors des taux de croissance considérablement plus élevés (principe de transition dynamique). A terme le pays doit atterrir sur son nouveau SCE et la croissance doit ralentir. Mais cela ne doit pas effacer la force du "miracle" de la croissance : en quelques décennies, le Japon est passé de la position d'un pays abîmé par la guerre au peloton de tête de l'économie mondiale.

Comment se réalise une telle transformation ? Si les différences dans les infrastructures sont le déterminant central des différences entre les pays, la réforme de ces infrastructures peut mettre un pays sur une trajectoire de croissance forte, en réorientant les ressources vers la production, en stimulant l'investissement, l'accumulation des qualifications, les transferts de technologie et une utilisation efficace de ces investissements.

En déplaçant le sentier de croissance de long terme d'une économie, ces réformes engagent le principe de dynamique de transition et génèrent les miracles de la croissance.

9.4 Conclusion

Même si elle a été sporadique dans la longue histoire de l'économie mondiale, la croissance a transformé dramatiquement les économies agricoles pauvres de l'Occident en des contrées où le niveau de vie est considérablement plus élevé. Notre intérêt dans la croissance part de l'hypothèse implicite que la compréhension de ses mécanismes nous permettra de mobiliser le même type de miracles dans les pays qui se trouvent aujourd'hui dans la pauvreté.

Annexe A

Compléments sur le modèle de Solow

A.1 La fonction de production néo-classique

Une fonction de production est dite *néo–classique* si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Productivités marginales décroissantes

$$\forall K > 0, L > 0, \begin{array}{ll} \dfrac{\partial F}{\partial K} > 0, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \end{array} \tag{A.1}$$

2. Rendements d'échelle constants

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \ \forall \lambda > 0. \tag{A.2}$$

(F est homogène de degré 1)

3. *Conditions d'Inada* (Inada(1963)

$$\begin{array}{l} \lim_{K \to 0} F_K = \lim_{L \to 0} F_L = \infty, \\ \lim_{K \to \infty} F_K = \lim_{L \to \infty} F_L = 0. \end{array} \tag{A.3}$$

(F_K et F_L sont de type hyperbolique)

Grâce aux rendements d'échelle constants, la fonction de production peut s'écrire sous la forme *per capita*

$$\begin{aligned} Y = F(K, L) = L.F(K/L, 1) = L.f(k) \\ \Rightarrow y \equiv Y/L = f(k) \\ \text{avec } f(k) \equiv F(K/L, 1). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Avec ces nouvelles notations, les productivités marginales peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= f'(k), \\ \frac{\partial Y}{\partial L} &= f(k) - k f'(k). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Et les conditions d'Inada impliquent

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty \text{ et } \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

De plus les conditions ($A.1 - A.3$) impliquent que les deux inputs sont *essentiels* :

$$F(0,L) = F(K,0) = f(0) = 0.$$

Un exemple souvent retenue est la fonction de *Cobb-Douglas*

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad A > 0,\ 0 < \alpha < 1 \tag{A.6}$$

$$\Rightarrow y = f(k) = Ak^{\alpha} \tag{A.7}$$

A.2 La règle d'or de l'accumulation du capital

Étant données les valeurs de n et de δ, chaque valeur de s correspond à une valeur unique $k^* > 0$:

$$k^*(s), \frac{dk^*(s)}{ds} > 0 \tag{A.8}$$

$$\text{et } s \cdot f(k^*(s)) = (n+\delta)k^*(s) \tag{A.9}$$

$$c^*(s) = (1-s)\cdot f(k^*(s))$$

$$c^*(s) = f(k^*(s)) - (n+\delta)k^*(s) \tag{A.10}$$

Cette fonction est représentée dans la figure suivante :

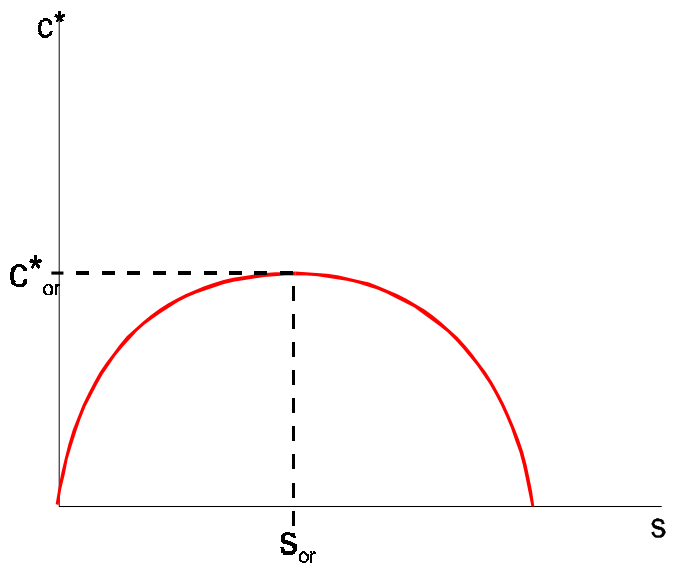


FIG. A.1: La règle d'or

La valeur de croissance équilibrée de c^* est d'abord croissant avec s (car s permet de financer l'investissement et donc la demande) et décroissant avec s ensuite (car s réduit le demande en réduisant directement la consommation). Donc il existe une valeur optimale de s qui maximise c^*.

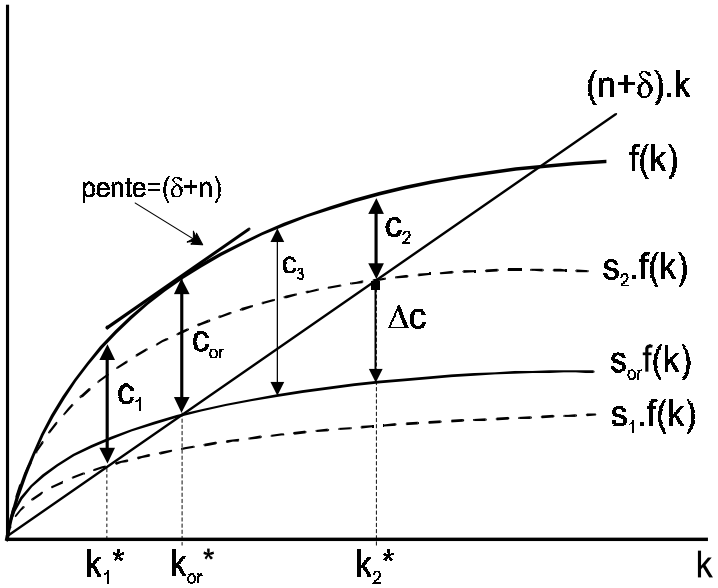
$$
\begin{aligned}
s_{or} &= \arg\max c^*(s), \\
\frac{dc^*}{ds} &= \left[f'(k^*) - (n+\delta)\right] \cdot \frac{dk^*}{ds} = 0 \\
&\Rightarrow \boxed{f'(k_o r) = (n+\delta)} \qquad \text{(A.11)} \\
\text{avec } k_{or} &= k^*(s_{or}) \\
c_{or} &= f(k_{or}) - (n+\delta) \cdot k_{or} \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

La règle A.11 est la **règle d'or** de l'accumulation du capital. Elle correspond à une variation du produit/tête qui compense exactement la dépréciation globale du capital/tête.

s_{or} est le taux d'épargne qui est dynamiquement efficace.

Grâce à ce taux d'épargne, nous avons un sentier de croissance équilibré qui maximise la consommation/tête et donc, le bien-être social.

Considérons les trois cas suivant : $s_1 < s_{or} < s_2$.



Comportements hors-équilibre I

$$s_1 < s_{or} < s_2 \Rightarrow k_1^* < k_{or}^* < k_{2.}^*$$

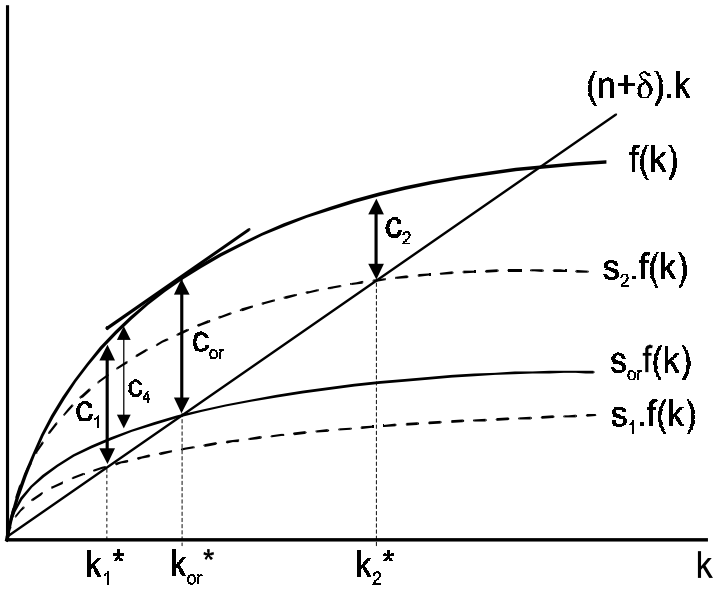
• Si à partir de $(s_2 > s_{or}, k_2^*, c_2)$, $s_2 \to s_{or}$:

→ cette variation va d'abord impliquer une croissance de c étant donné k_2^* et nous allons avoir $\dot{k} < 0$;

→ k va donc commencer à baisser dans le temps et c va baisser aussi continûment pour atteindre c_{or};

→ or, $c_{or} > c_2$ par définition du premier terme et donc la consommation/tête sera supérieure à c_2 à chaque moment de la trajectoire (*cf.* c_3) et à la nouvelle solution de croissance équilibrée.

→ Une économie avec un taux d'épargne s_2 est donc **dynamiquement inefficace** car il est possible d'améliorer la consommation/tête à chaque point du temps.



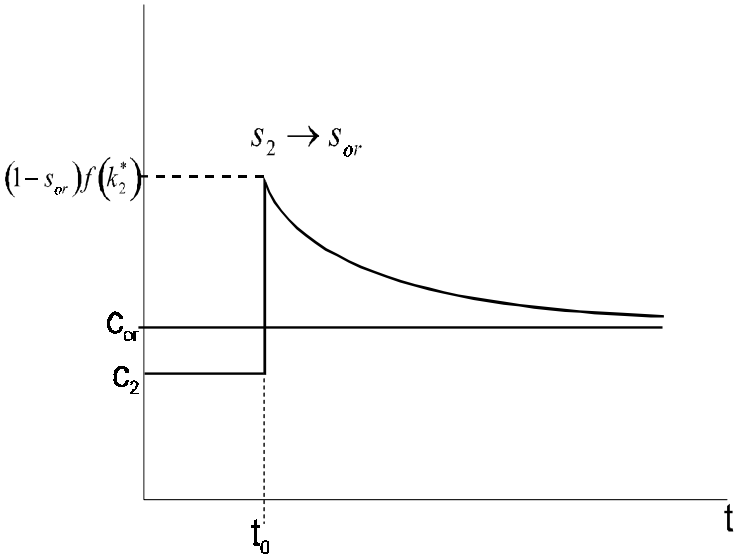
Comportements hors-équilibre II

• Si $s_1 \to s_{or}$:

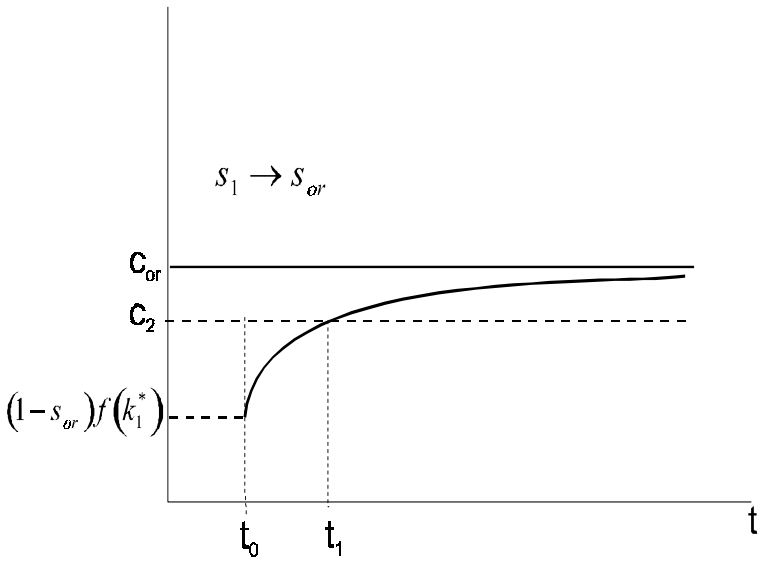
→ la consommation/tête va d'abord baisser et elle va rester inférieur à c_1 pendant un certain temps, tout en augmentant vers c_{or};

→ en définitive, elle sera supérieure à $c_1 < c_{or}$;

→ néanmoins, l'effet total sur le bien–être dépendra de l'arbitrage des consommateur entre la consommation présente et future.



Convergence I : $s_2 \to s_{or}$



Convergence II : $s_1 \to s_{or}$

A.3 Dynamiques de transition

Les résultats de ce modèle sont donc relativement frustrants. **A l'équilibre**, la croissance est uniquement expliquée par des facteurs exogènes.

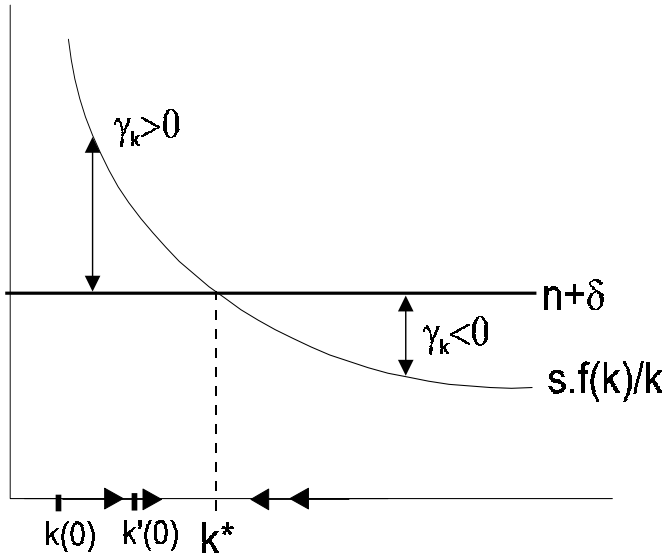
Il est néanmoins possible d'obtenir plus d'information sur le fonctionnement de cette économie en étudiant sa dynamique de transition : la manière dont le revenu/tête converge sur sa valeur de croissance équilibrée.

En divisant par k les deux membres de l'équation dynamique fondamentale, nous obtenons

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \frac{f(k)}{k} - (n+\delta) \tag{A.13}$$

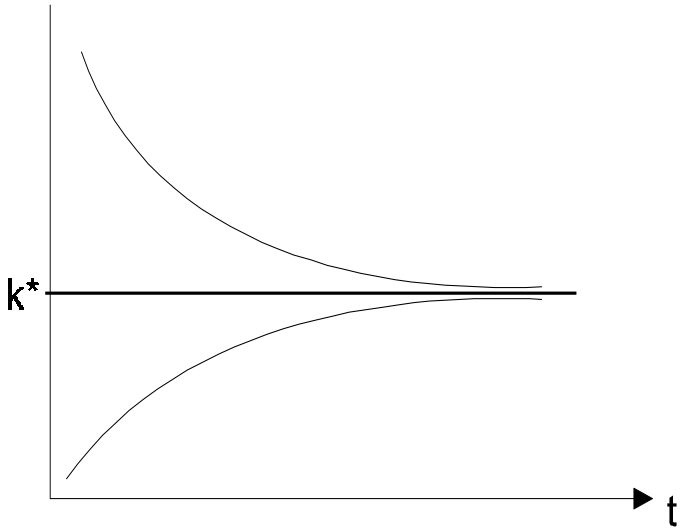
où γ_x est le taux de croissance de la variable par tête x. A chaque moment, le taux de croissance du niveau global de X est donné par

$$\gamma_X = \gamma_x + n.$$



Convergence vers le SCE

Le sentier de croissance équilibrée est donc globalement stable :



Stabilité du SCE

Cette stabilité provient en fait des rendements décroissants du facteur capital.

Quand k **est relativement faible** $(k < k^*)$, la productivité moyenne du capital $(f(k)/k)$ est relativement forte.

○ les agents épargnent et investissent une part constante du revenu et donc l'investissement brut par unité de capital, $sf(k)/k$ est fort ;

○ la dépréciation du k se fait à un taux constant $(n+\delta)$;

○ le taux de croissance $\dot{k}/k$ est donc positif et relativement fort.

(le raisonnement est inversé si $(k > k^*)$.)

Dynamique du revenu/tête

Nous pouvons aussi calculer le taux de croissance du revenu/tête :

$$\gamma_y = \dot{y}/y = \frac{f'(k)\,\dot{k}}{f(k)} = k\frac{f'(k)}{f(k)}\frac{\dot{k}}{k} = \left[\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}\right]\cdot\gamma_k \tag{A.14}$$

L'expression $[\cdot]$ correspond à la *part du capital* – la part de la rémunération du capital dans le revenu total :

$$\Psi(k) = \frac{k\cdot f'(k)}{f(k)} = \frac{\frac{K}{L}F_K}{\frac{Y}{L}} = \frac{K\cdot F_K}{Y}. \tag{A.15}$$

Dans le cas d'une fonction Cobb-Douglas cette part est constante et elle est égale à α et donc le taux de variation du revenu/tête est une fraction constante α de γ_k .

De manière générale, en utilisant l'équation A.13 :

$$\gamma_y = s\cdot f'(k) - (n+\delta)\cdot\Psi(k), \tag{A.16}$$

Nous pouvons étudier comment ce taux de variation se modifie avec k (sur une trajectoire) :

$$\frac{\partial\gamma_y}{\partial k} = s\cdot f''(k) - (n+\delta)\cdot\frac{d\Psi(k)}{dk} \tag{A.17}$$

$$\Psi(k) = \frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(k)}{dk} &= \frac{(f'+kf'')\cdot f - kf'^2}{f^2} \\ &= \frac{f'}{f}\cdot\left[1-k\frac{f'}{f}\right]+k\frac{f''}{f} \\ &= \frac{f'}{f}\cdot[1-\Psi(k)]+k\frac{f''}{f}\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma_y}{\partial k} &= f''\cdot\left[s-\frac{(n+\delta)\,k}{f}\right] \\ &\quad -\frac{(n+\delta)\,f'}{f}\cdot[1-\Psi(k)] \\ &= \frac{f''\cdot k}{f}\cdot[s\cdot f/k-(n+\delta)] \\ &\quad -\frac{(n+\delta)\,f'}{f}\cdot[1-\Psi(k)]\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial\gamma_y}{\partial k} = \underbrace{\frac{f''\cdot k}{f}}_{<0}\cdot\gamma_k \underbrace{-\frac{(n+\delta)\,f'}{f}\cdot[1-\Psi(k)]}_{<0}} \tag{A.19}$$

Nous avons deux cas :

• $k \leq k^*$

$$\gamma_k \geq 0 \Rightarrow \gamma_y \geq 0 \text{ et } \frac{\partial \gamma_y}{\partial k} < 0. \tag{A.20}$$

Si le capital/tête croît, le revenu par tête croît aussi mais de plus en plus faiblement.

• $k \geq k^*$

$$\gamma_k \leq 0 \Rightarrow \gamma_y < 0 \text{ et } \frac{\partial \gamma_y}{\partial k} \overset{?}{<} 0. \tag{A.21}$$

Dans ce cas le premier terme devient positif et le résultat est ambigu.

Si l'on est proche de k^* alors γ_k est très faible en valeur absolue et le second terme négatif domine :

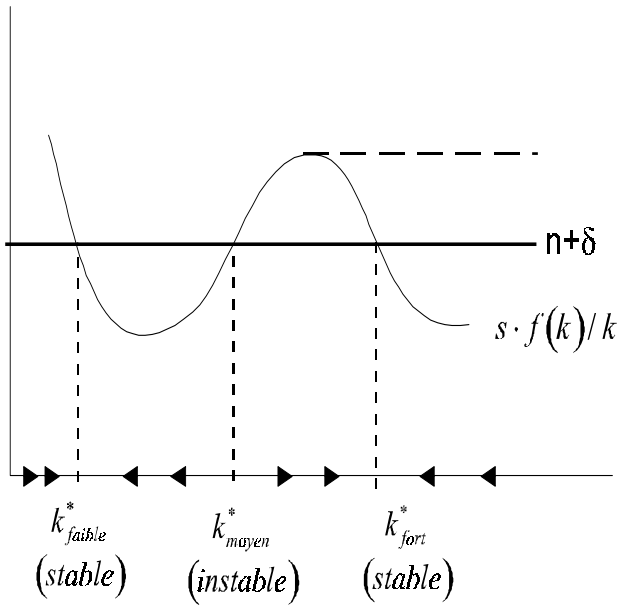
$$\lim_{k \downarrow k^*} \frac{\partial \gamma_y}{\partial k} < 0. \tag{A.22}$$

Ce raisonnement est aussi valable pour la consommation/tête car $\gamma_c = \gamma_y$ à chaque point du temps : la consommation possède la même dynamique que le revenu.

A.4 Modèles de croissance avec "trappe à la pauvreté"

Dans le modèle néo-classique, les propriétés de la fonction de production assurent que la productivité moyenne $f(k)/k$ est toujours décroissante et le SCE est unique.

Sous d'autres circonstances, nous pouvons avoir des zones de croissance et de décroissance de cette productivité moyenne selon les valeurs de k. Si une zone de décroissance est suivie d'une zone de croissance, il peut apparaître une *trappe à la pauvreté*.



Trappe à la pauvreté

Si l'économie démarre à un $k < k^*_{moyen}$, elle revient à k^*_{faible}.

Si d'une manière ou d'une autre elle dépasse k^*_{moyen}, elle converge vers k^*_{fort}.

Si la décroissance des rendements ne fait pas suffisamment baisser $f(k)/k$ à droite de k^*_{moyen} (courbe en pointillés), alors k^*_{fort} disparaît et le seul sentier stable correspond à k^*_{faible} (trappe à la pauvreté).

Cette forme de la productivité moyenne peut apparaître si à des niveaux de développement faibles, l'économie est surtout basée sur l'agriculture.

Ce secteur correspond effectivement à des rendements décroissants.

La poursuite du développement, se basant maintenant sur l'industrie et les services, peut faire apparaître des zones de rendements croissants.

Si les avantages de l'apprentissage par l'expérience et de la division du travail s'épuisent, l'économie peut de nouveau entrer dans une phase de rendements décroissants.

Dans ce cas, une croissance du taux d'épargne, même temporaire, peut faire sortir l'économie de la trappe.

En effet si la hausse dure suffisamment longtemps pour que l'économie dépasse k^*_{moyen}, elle convergera vers le régime fort même si le taux d'épargne baisse par la suite.

L'effet d'une diminution du taux de croissance de la population est de même nature.

D'autre part, une aide extérieure ne peut assurer une croissance de long terme que si elle est suffisamment importante pour faire passer l'économie au delà de k^*_{moyen}. Dans ce cas, le pays peut sortir de la trappe à la pauvreté grâce à cette aide.

Néanmoins, il existe peu d'observations empiriques correspondant à ce type de structure productive.

Annexe B

Le modèle keynésien de Harrod (1939)

Il s'agit d'un modèle à un seul secteur de production (un seul bien) et à un seul pays.

Harrod étend le modèle keynésien de base en y incluant la dynamique du capital (l'investissement) et de l'emploi (la population active).

Harrod s'interroge sur la capacité des économies capitalistes à réaliser une croissance qui respecte l'équilibre du marché du bien et de celui du travail simultanément.

Il a donc deux types de problèmes :

- un problème de court terme d'existence de l'équilibre ;
- un problème de long terme de stabilité de l'équilibre.

B.1 Équilibre du marché du bien

Dans un cadre statique, la condition keynésienne de l'équilibre du marché du bien est donné par $I = S$. Dans un cadre dynamique, cette égalité doit être valide dans le temps :

$$I_t = S_t \tag{B.1}$$

En tant que flux, l'investissement joue un rôle dynamique important :

$$I_t = \Delta K_t \text{ ou } I_t = \frac{dK}{dt} = \dot{K}_t \tag{B.2}$$

selon que l'on utilise un temps discret ou continu.

La condition d'équilibre $(B.1)$ devient alors :

$$S_t = \dot{K}_t \tag{B.3}$$

L'investissement est déterminé par les anticipations des entrepreneurs sur la croissance de la demande $\left(\frac{dY_t}{dt}\right)$ (mécanisme d'accélérateur).

De plus le coefficient de capital à l'équilibre est constant : γ

$$Y_t = \frac{1}{\gamma} K_t \text{ ou } K_t = \gamma Y_t \tag{B.4}$$

où γ est le coefficient marginal du capital et $1/\gamma$ est la productivité marginale du capital. En considérant la dynamique d'équilibre, on doit avoir :

$$\Delta K_t = \gamma \cdot \Delta Y_t \text{ ou } \dot{K}_t = \gamma \dot{Y}_t \tag{B.5}$$

la variation de Y correspond ici aux anticipations des producteurs.
La condition d'équilibre $(B.3)$ devient alors :

$$I_t = \dot{K}_t = \boxed{\gamma \dot{Y}_t = sY_t} = S_t \tag{B.6}$$

où s $(= 1 - c)$ est la propension moyenne à épargner (Keynes).
En divisant les deux membres de l'équation précédente par Y_t, on obtient

$$\gamma \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = s \Leftrightarrow \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \boxed{g_w = \frac{s}{\gamma}} \tag{B.7}$$

g_w (w : warranted=**garanti**) est le taux de croissance du revenu qui assure l'équilibre du marché de bien : les anticipations des producteurs et le comportement des consommateurs sont compatibles dans le temps si l'économie croît au taux g_w.

Si les producteurs n'anticipent pas correctement l'évolution de la demande, le taux de croissance effectif de l'économie peut être différent du taux garanti et impliquer ainsi un déséquilibre sur le marché des biens (**le premier problème de Harrod**).

L'évolution du revenu doit alors suivre la trajectoire

$$Y_t = Y_0^K \cdot e^{g_w t} \text{ avec } Y_0^K = \frac{1}{\gamma} K_0. \tag{B.8}$$

B.2 Équilibre du marché du travail

Cela correspond à la condition

$$\begin{aligned} Offre \quad d'emplois &= Demande \quad d'emplois \\ L_t &= N_t \quad (Pop.\ active) \end{aligned} \tag{B.9}$$

A l'équilibre, la constance de la technologie et des prix doivent conduire à un coefficient marginal du facteur-travail constant (λ)

$$L_t = \lambda Y_t \tag{B.10}$$

La condition d'équilibre $(B.9)$ devient alors

$$\lambda Y_t = N_t$$

qui nous donne le niveau de production qui permet d'employer toute la population active. Cette condition peut aussi être exprimée en termes de taux de croissance (dérivée logarithmique)

$$\begin{aligned} \ln(\lambda Y_t) &= \ln(N_t) \\ \ln(\lambda) + \ln(Y_t) &= \ln(N_t) \\ \ln(Y_t) &= \ln(N_t) - \ln(\lambda) = \ln(N_t) + \ln(1/\lambda) \end{aligned}$$

En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient les dérivées logarithmiques donc, des taux de croissance

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{N}_t}{N_t} + \frac{\dot{(1/\lambda)}}{(1/\lambda)} \\ g_n &= \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = n + \ell \end{aligned}$$

où n est le taux de croissance de la population et ℓ est le taux de croissance de la productivité du travail. g_n est le **taux** de croissance **naturel** qui rend compatible l'évolution de la production et celle de la population active de manière à ne pas créer du chômage.

Par conséquent, nous devons avoir l'évolution suivante

$$\begin{aligned} N_t &= N_0 \cdot e^{nt} \\ Y_t &= Y_0^L \cdot e^{g_n t} \quad \text{avec } Y_0^L = \frac{1}{\lambda} N_0. \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.3 Le second problème de Harrod

Il concerne l'équilibre simultané sur les deux marchés.

La croissance respecte l'équilibre du marché des biens, s'il se fait au taux $g_w = s/\gamma$.

Elle respecte l'équilibre du marché du travail si son taux est égal à $g_n = n + \ell$.

L'équilibre simultané sera respecté dans le temps si et seulement si le taux effectif respecte

$$g = g_w = g_n \Leftrightarrow \boxed{\frac{s}{\gamma} = n + \ell} \tag{B.12}$$

or

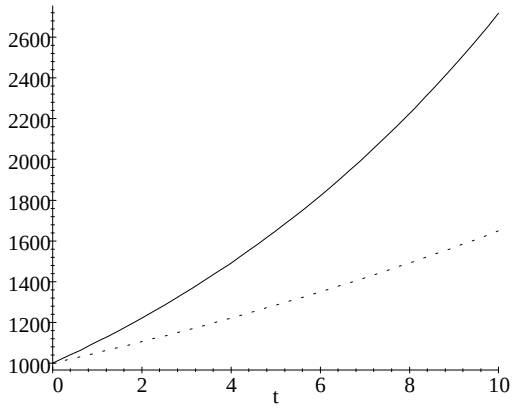
- s provient du comportement de consommation des ménages ;
- γ et ℓ sont déterminés par la technologie ;
- n est déterminé par les lois démographiques.

Par conséquent ces quatre variables sont exogènes et la réalisation de la condition d'équilibre simultané $(B.12)$ ne peut être que fortuite : il n'y a aucune raison pour que la croissance soit équilibrée.

De plus l'équilibre, même quand il existe, est très instable car si l'on part d'une situation de déséquilibre $(g_w < g_n$ par exemple$)$, on s'éloigne de plus en plus de l'équilibre.

Exemple :

$Y_0 = Y_0^K = Y_0^L = 1000$, $g_w = 0.1$, $g_n = 0.05$



Le seul équilibre simultané est en t_0 est il n'est pas stable puisqu'on s'en écarte de plus en plus.

Le modèle de Harrod était bien sûr conforme aux sentiments qu'avaient les économistes à la sortie de la crise de 1929. Mais les Trente glorieuses correspondaient à un sentiment de confiance dans la croissance équilibrée.

Le modèle de Solow cherche effectivement à rétablir la validité de la croissance équilibrée en relâchant une hypothèse importante de Harrod : la fixité des prix qui implique la fixité des coefficients de production. Solow va introduire une technologie avec des facteurs substituables. Cela va modifier radicalement les résultats négatifs de Harrod.

Annexe C

Réponse post-keynésienne

Nicolas Kaldor explore la détermination de l'équilibre à travers un comportement différencié d'épargne.

Il considère deux classes : les *travailleurs* et les *capitalistes*. La classe qui détient les capitaux a alors une position dominante dans la répartition du revenu et dans la fixation d'un taux d'épargne global compatible avec la réalisation d'un SCE.

La réponse post-keynésienne (ou néo-cambridgienne) met donc l'accent sur la relation entre la répartition du revenu et l'accumulation du capital.

C.1 Répartition et équilibre

C'est un modèle keynésien mettant l'accent sur le rôle de la demande globale et du multiplicateur dans la détermination du SCE.

Kaldor élimine de l'analyse l'utilisation d'une fonction de production explicite. Il considère une économie à deux classes : les travailleurs et les capitalistes.

Cette économie a les caractéristiques suivantes :

Hypothèse 1 *Les travailleurs reçoivent uniquement les revenus du travail et les capitalistes, uniquement les revenus du capital.*

Hypothèse 2 *Le comportement d'épargne est différent entre les deux classes. Les travailleurs ont une propension à épargner s_w et les capitalistes, s_c avec $0 < s_w < s_c$.*

Hypothèse 3 *L'équilibre du marché des biens est assuré et il correspond à $S_t = I_t$ ou, plus exactement, à $\frac{S_t}{Y_t} = \frac{I_t}{Y_t}$.*

Hypothèse 4 *La part de la demande d'investissement dans le revenu est une donnée exogène qui vérifie l'inégalité*

$$s_w \leq \frac{I_t}{Y_t} \leq s_c \tag{C.1}$$

L'*Hypothèse* 1 définit le rôle des deux classes, en excluant notamment la possibilité de recevoir des revenus salariaux pour les capitalistes. De même, les travailleurs n'ont pas accès aux profits.

L'*Hypothèse* 2 tient principalement compte du fait que les capitalistes doivent faire des réserves et donc leur épargne doit être plus forte.

L'*Hypothèse* 3 limite l'analyse à des situations d'équilibre et l'*Hypothèse* 4 assure l'existence de l'équilibre.

De plus, en considérant I/Y comme une donnée, elle élimine le problème du choix de technique en considérant qu'il est effectué de manière optimale. Dans ce cas, le coefficient de capital (γ) respecte l'équilibre dynamique (SCE) si

$$\begin{aligned}\dot{\left(\frac{K}{N}\right)} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = n = \frac{\dot{N}}{N} \\ \Rightarrow I_t = \dot{K}_t = nK_t. \\ \Rightarrow \frac{I_t}{Y_t} = \frac{\dot{K}_t}{Y_t} = n \cdot \frac{K}{Y} = n \cdot \gamma. \end{aligned} \tag{C.2}$$

où N est la population active et n le taux de croissance de cette population.

Soient W la masse salariale, P la masse des profits et $S = S_w + S_c$ l'épargne globale. Nous devons alors avoir

$$Y_t = W_t + P_t \tag{C.3}$$

équation de répartition du revenu.

$$\begin{aligned} S_t &= S_{wt} + S_{ct} \\ &= s_w \cdot W_t + s_c \cdot P_t \\ &= s_w (Y_t - P_t) + s_c \cdot P_t \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$S_t = s_w Y_t + (s_c - s_w) P_t \tag{C.5}$$

Cela nous donne l'équation de l'épargne.

Et à partir de la condition d'équilibre $(Hypothèse\ 2)$

$$\begin{aligned} \frac{S_t}{Y_t} &= \frac{I_t}{Y_t} \\ \frac{S_t}{Y_t} &= (s_c - s_w)\frac{P_t}{Y_t} + s_w = \frac{I_t}{Y_t} \end{aligned} \tag{C.6}$$

Cette condition d'équilibre a deux types de conséquences :

- à court terme, quand I/Y est exogène, comme le suppose $H4$, alors l'équilibre du marché des biens peut toujours être réalisé grâce à une répartition adaptée du revenu ;
- à long terme, quand on tient compte de la dynamique de la population, la condition $(C.2)$, le SCE n'est atteignable que si l'inégalité de l'Hypothèse 4 est vérifiée. Dans ce cas, la répartition du revenu adaptée assure l'équilibre de court terme qui correspond au SCE.

$\left(\frac{I_t}{Y_t}\right)_0$ vérifie la condition $(C.1)$ (donc l'*Hypothèse* 4) et l'équilibre existe pour $\left(\frac{P_t}{Y_t}\right)^*$. Avec $\left(\frac{I_t}{Y_t}\right)_1$, l'équilibre n'existe pas.

De plus la répartition d'équilibre est déterminée selon un mécanisme de multiplicateur

$$\frac{P_t}{Y_t} = \frac{1}{s_c - s_w}\frac{I_t}{Y_t} - \frac{s_w}{s_c - s_w} \tag{C.7}$$

où $\frac{1}{s_c - s_w}$ joue le rôle du multiplicateur $(1 > s_c - s_w > 0)$. Quand la part de l'investissement augmente sans mettre en cause l'existence de l'équilibre, la part des profits augmente aussi à l'équilibre.

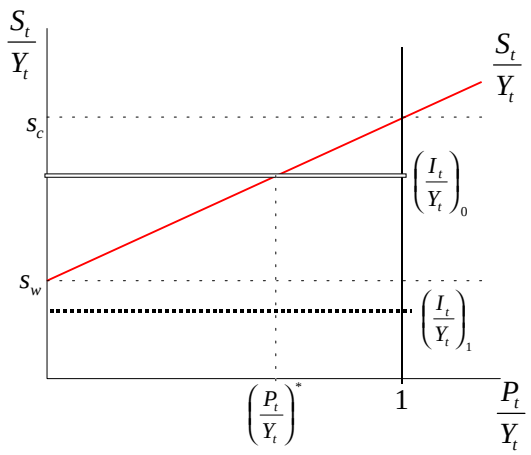


FIG. C.1: Equilibre et répartition

C.2 Statique comparative

C.2.1 Consensus social

L'existence d'un consensus social peut éviter les situations extrêmes de répartition où tout le revenu est accaparé par les travailleurs $\left(\frac{P}{Y}=0\right)$ ou par les capitalistes $\left(\frac{P}{Y}=1\right)$.

La recherche de la paix sociale peut imposer une borne inférieure $\left(\frac{P}{Y}\right)_{\min}$ et une borne supérieure $\left(\frac{P}{Y}\right)_{\max}$ à la part des profits dans le revenu. Quel est l'impact sur l'équilibre d'une telle situation ?

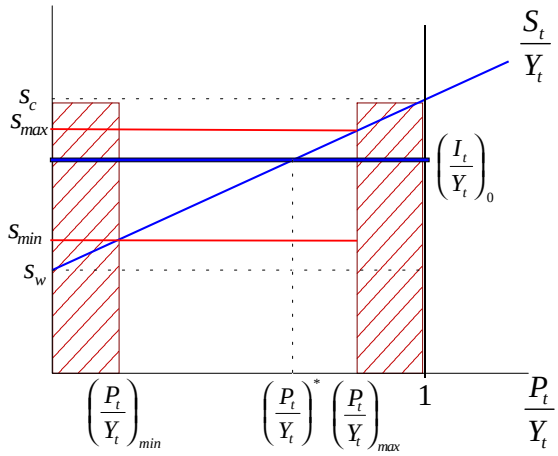


FIG. C.2: Consensus social et équilibre

L'équilibre n'existe maintenant que pour les valeurs de l'investissement vérifiant

$$s_w \leq s_{\min} \leq \frac{I_t}{Y_t} \leq s_{\max} \leq s_c.$$

Par conséquent, il devient plus difficile à atteindre.

C.2.2 “La cruche de la veuve”

Si l’on part de la condition d’équilibre du marché de bien (condition $(C.6)$)

$$I = S = s_w Y + (s_c - s_w) P$$

en divisant les deux membres par K

$$\begin{aligned}
\frac{I}{K} &= s_w \frac{Y}{K} + (s_c - s_w) \frac{P}{K} \\
\frac{P}{K} &= \frac{1}{(s_c - s_w)} \left(\frac{\dot{K}}{K} - s_w \frac{Y}{K} \right) \\
\pi = \frac{P}{K} &= \frac{1}{(s_c - s_w)} \left(g - \frac{s_w}{\gamma} \right)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

où $g = \dot{K}/K \ (\approx g_w)$ est le taux de croissance du capital et γ est de nouveau le coefficient marginal du capital. π représente naturellement le taux de profit. Cette équation met donc en relation le taux de profit et le comportement d’épargne des deux classes. On a plusieurs cas intéressants.

– Si l’épargne des travailleurs est négligeable $(s_w = 0)$, la condition précédente devient

$$\pi = \frac{g}{s_c} \tag{C.9}$$

Dans ce cas, pour un niveau donné de g, plus les capitalistes consomment (plus faible est s_c), plus leur taux de profit est élevé : “*les travailleurs dépensent ce qu’ils gagnent et les capitalistes gagnent ce qu’ils dépenses*” (Kalecki).

On peut aussi montrer cela à l’aide d’un graphique.

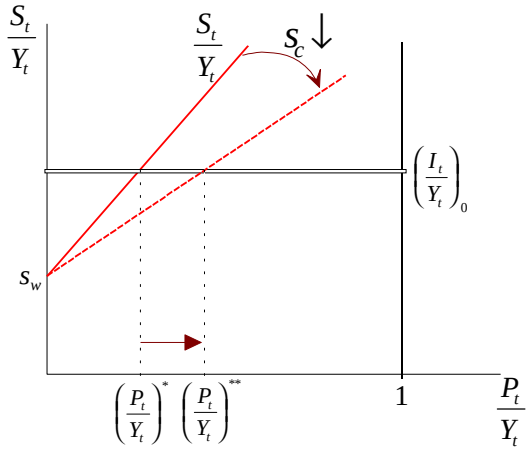


FIG. C.3: La “cruche de la veuve”

– Si les travailleurs n’épargnent pas et la totalité du profit est réinvestie (si les capitalistes ne consomment pas du tout leur profit) on a $s_w = 0$ et $s_c = 1$

$$\pi = g \tag{C.10}$$

C’est **la règle d’or** de l’accumulation : le taux de profit est égal au taux de croissance.

C.3 L'équilibre dynamique

Si l'on intègre maintenant l'équilibre du marché du travail, nous savons que le SCE ne correspond au plein-emploi que si $g = g_w = n = g_n$ (voir Harrod). L'équation $(C.8)$ donne alors

$$\pi = \frac{1}{(s_c - s_w)}\left(n - \frac{s_w}{\gamma}\right) \tag{C.11}$$

et c'est le seul taux de profit qui est compatible avec la croissance équilibrée et le plein-emploi. On peut alors en déduire une condition d'équilibre similaire à celle de Harrod.

Pour cela on doit se rappeler que la part des profits dans le revenu ne peut être plus de 100% (car sinon les salaires seraient négatifs). Or, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{P}{Y} &= \frac{P}{K}\frac{K}{Y} = \pi \cdot \gamma \\ \frac{P}{Y} &= \frac{\gamma}{(s_c - s_w)}\left(n - \frac{s_w}{\gamma}\right). \end{aligned} \tag{C.12}$$

Cela doit donc respecter

$$\begin{aligned} &\frac{P}{Y} > 0 \Rightarrow \frac{s_w}{\gamma} < n, \\ &\frac{P}{Y} < 1 \Rightarrow n - \frac{s_w}{\gamma} < \frac{(s_c - s_w)}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{s_c}{\gamma} > n \end{aligned}$$

La condition $n = s/\gamma$ de Harrod devient donc

$$\frac{s_w}{\gamma} < n < \frac{s_c}{\gamma} \tag{C.13}$$

et cette condition rend plus facile la réalisation d'une croissance équilibrée de plein-emploi : c'est l'écart entre s_w et s_c qui détermine la possibilité d'existence de l'équilibre. Plus les comportements sont différenciés, plus facilement l'économie peut atteindre le SCE de plein-emploi.

Si tous les salaires sont consommés $(s_w = 0)$ et tous les profits épargnés $(s_c = 1)$, la condition $(C.11)$ devient

$$\pi = n \tag{C.14}$$

qui exprime l'égalité entre le taux de profit et le taux de croissance naturel. C'est la **règle d'or**qui tient compte du plein-emploi du travail.

Si l'on tient compte du fait que les capitalistes ont plus de latitude pour fixer leur taux d'épargne (celui des travailleurs est plus fortement conditionné par la subsistance), le modèle de Kaldor nous donne la manière dont le comportement de cette classe détermine les grandeurs économiques : le partage du revenu, le taux de profit...

Bien sûr, il s'agit d'un modèle assez *ad hoc* et caricaturale, et les résultats dépendent des simplifications qui en sont à la base. Notamment la distribution et les comportements sont extrêmement schématiques et rien n'empêche les *travailleurs* d'avoir un capital et d'en tirer des dividendes. Le modèle de Passinetti (1962) élimine d'ailleurs cette restriction (*cf.* Abraham-Frois(1991), p. 198-202).

Annexe D

Modèle de Ramsey. Arbitrage consommation–épargne

Nous allons maintenant étudier un modèle de croissance qui intègre explicitement un comportement de consommation des ménages. L'épargne ne sera donc plus déterminée à travers une propension moyenne exogène.

Nous allons considérer que les individus ont un horizon infini. Plutôt qu'une vie infinie, cela correspond à une prise en compte, par chaque génération, de l'intérêt des générations futures, de manière altruiste.

Nous allons comparer deux mécanismes d'allocation différents :

D'abord, en suivant le travail de Ramsey, nous allons considérer que l'allocation des ressources est effectuée par un planificateur central qui cherche à maximiser le bien-être de l'agent représentatif. Ensuite, nous allons intégrer une allocation décentralisée, par les marchés.

Nous allons observer en particulier qu'avec un horizon de décision infini, des rendements d'échelle constants, des agents homogènes et des marchés concurrentiels, les deux mécanismes conduisent à la même allocation des ressources.

D.1 Le problème de Ramsey(1928)

Ramsey a cherché à déterminer l'épargne qu'une nation doit effectuer dans une perspective dynamique.

La population, N_t, croît au taux n. On peut la voir comme une famille unique ou comme des familles identiques se développant dans le temps.

Chaque adulte offre une unité de main d'oeuvre et donc, l'offre de travail est égale à la population.

La production est réalisée à partir de cette main d'oeuvre et du capital, K_t. Il n'y a pas de progrès technique.

Le produit est soit consommé, soit investi :

$$Y_t = F(K_t, N_t) = C_t + \dot{K}_t \tag{D.1}$$

Nous exclurons la dépréciation du capital. La fonction $F(\cdot)$ est néo-classique.

En termes *per capita*, cette équation devient :

$$f(k) = c + \dot{k} + nk \Leftrightarrow \dot{k} = f(k) - c - nk \tag{D.2}$$

L'économie démarre avec un capital/tête $k_0 > 0$.

Au moment s l'utilité instantanée de la famille est donnée, en **valeurs courantes**, par :

$$u(c_s) \geq 0,\ u' \geq 0,\ u'' \leq 0, \tag{D.3}$$

on l'appelle aussi la fonction de "félicité" (ou de "bonheur").

A ce moment s, l'utilité d'une consommation qui a lieu à un moment $t > s$ est donnée en **valeurs actualisées** par :

$$u(c_t) \cdot e^{-\theta(t-s)}$$

où $\theta > 0$ est la préférence pour le présent ou le taux d'escompte subjectif.

Si l'on considère l'utilité totale jusqu'à la fin des temps (l'infini), on peut l'écrire, en temps continu et en valeurs actualisées au moment s :

$$U_s = \int_s^{\infty} u(c_t) \cdot e^{-\theta(t-s)} \cdot dt \tag{D.4}$$

D.2 Consommation optimale

Le planificateur central cherche à maximiser le bien-être social à chaque moment du temps.

Il doit donc déterminer un sentier de consommation optimale qui tient compte des caractéristiques de l'économie. Ce sentier doit établir, à chaque moment, un arbitrage entre la consommation présente et la consommation future qui va profiter de l'investissement et donc de l'épargne.

Il doit résoudre le problème suivant $(s = 0)$:

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^{\infty} u(c_t) \cdot e^{-\theta t} \cdot dt \tag{D.5}$$

$$S.à. \quad \begin{cases} \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t \\ k(0) = k_0 \\ \forall t,\ k_t \geq 0, c_t \geq 0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est un sentier de consommation optimale : $c^*(t) = c_t^*$. C'est donc une fonction du temps et non une valeur unique.

Nous avons donc un problème de **commande optimale**. On résoud ce type de problème en appliquant le *principe de maximum* de Pontryagin.

D.3 Maximum de Pontryagin

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^{\infty} u(c_t) \cdot e^{-\theta t} \cdot dt \tag{D.6}$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t \tag{D.7}$$

$$k(0) = k_0 \tag{D.8}$$

$$\forall t,\ k_t \geq 0, c_t \geq 0 \tag{D.9}$$

Quand on considère l'évolution dynamique de cette économie, à chaque moment du temps, l'état du système peut être décrit avec k. Cette variable est donc la *variable d'état*.

L'évolution de cette variable est donnée par $\dot{k}_t$ et elle est déterminée d'une part par l'état (k_t), mais d'autre part, par une autre variable qui la commande c_t. c_t est donc la *variable de commande.*

La contrainte $(D.7)$ nous donne la manière dont la commande influence l'évolution de l'état de ce système. C'est pour cette raison qu'on l'appelle l'*équation de mouvement* ou l' *équation d'état.*

La contrainte $(D.8)$ tient compte de l'état initial de ce système.

La résolution de ce système revient à chercher une *commande optimale,* $c^*(t)$, qui maximise l'utilité des agents à chaque moment du temps : c'est une **fonction** du temps. La valeur optimale de cet objectif sera donc donnée par :

$$U_0^* = \int_0^\infty u(c^*(t)) \cdot e^{-\theta t} \cdot dt.$$

On résout ce type de problème de maximisation d'un *fonctionnel* (=fonction de fonctions) sous contrainte en utilisant une transformation proche du *Lagrangien* : le *Hamiltonien.*

On construit une nouvelle fonction objectif qui intègre aussi la contrainte mais en la multipliant par un *prix implicite* qui est similaire au multiplicateur de Lagrange. Mais ce multiplicateur varie avec le temps : μ_t.

On obtient alors le Hamiltonien associé à ce problème :

$$H_t = u(c_t)\, e^{-\theta t} + \mu_t \cdot \left(\underbrace{f(k_t) - c_t - nk_t}_{\dot{k}} \right) \tag{D.10}$$

La variable μ est le prix implicite associé à la variable d'état k. Elle nous donne la **valeur marginale actualisée** au moment 0 d'une unité de capital supplémentaire au moment t.

Il est souvent plus aisé de travailler de travailler avec **la valeur marginale courante** au moment t de cette unité de capital :

$$\begin{aligned} \lambda_t \equiv \mu_t \cdot e^{\theta t} &\Leftrightarrow \mu_t = \lambda_t \cdot e^{-\theta t} \\ \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\mu} \cdot e^{\theta t} + \theta \mu \cdot e^{\theta t} &= \dot{\mu} \cdot e^{\theta t} + \theta \lambda \end{aligned} \tag{D.11}$$

En remplaçant μ par λ dans $(D.10)$, nous obtenons :

$$H_t = e^{-\theta t} \cdot [u(c_t) + \lambda_t \cdot (f(k_t) - c_t - nk_t)] \tag{D.12}$$

Nous allons résoudre ce problème en négligeant les conditions de positivité sur k et c. Les conditions nécessaires (et suffisantes étant données les propriétés de ces fonctions) seront alors données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= 0 \\ \frac{d\mu}{dt} \equiv \dot{\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial k} \\ \lim_{t \to \infty} k_t \mu_t &= 0 \end{aligned}$$

La première condition est une condition d'optimalité standard. La seconde conditions est l'*équation de mouvement* du prix implicite μ. La dernière condition est la *condition de transversalité* et nous allons la discuter un peu plus loin.

En tenant compte de la définition de H et en utilisant λ, ces conditions deviennent :

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'(c_t) - \lambda_t = 0 \tag{D.13}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = u'(c_t) \tag{D.14}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k} \cdot e^{\theta t} + \theta\lambda$$

$$\dot{\lambda} = \lambda \cdot \left(n - f'(k) + \theta\right) \tag{D.15}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t \cdot \left(\lambda_t \cdot e^{-\theta t}\right) = \lim_{t\to\infty} k_t \cdot \left(u'(c_t) \cdot e^{-\theta t}\right) \tag{D.16}$$

$$= 0 \tag{D.17}$$

Les équations $(D.13)$ et $(D.15)$ peuvent être combinées pour éliminer le multiplicateur λ :

$$\dot{\lambda} = \frac{du'(c_t)}{dt} = u'(c_t) \cdot \left(n - f'(k) + \theta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = n - f'(k) + \theta \tag{D.18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u''(c_t) \cdot (dc_t/dt)}{u'(c_t)} = n - f'(k) + \theta$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{c_t \cdot u''(c_t)}{u'(c_t)}\right] \cdot \frac{\dot{c}_t}{c_t} = n - f'(k) + \theta \tag{D.19}$$

Les conditions essentielles sont donc $(D.19)$ et $(D.16)$:

$$\dot{\lambda} = \lambda \cdot \left(n - f'(k) + \theta\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{c_t \cdot u''}{u'}\right] \frac{\dot{c}_t}{c_t} = n - f'(k) + \theta$$

$$\lim_{t\to\infty} k \cdot \left(\lambda_t \cdot e^{-\theta t}\right) = \lim_{t\to\infty} k \cdot \left(u'(c_t) \cdot e^{-\theta t}\right).$$

La première de ces conditions doit être vérifiée à tout point du sentier de consommation optimal. On l'appelle la règle de *Keynes–Ramsey.*

D.4 Règle de Keynes–Ramsey

Cette règle est plus facile à comprendre quand on voit le temps en termes discrets et si l'on considère le problème d'allocation de consommation entre les moments t et $t+1$ par le planificateur central.

S'il diminue la consommation à la date t de dc, il cause une perte d'utilité de $u'(c_t)\,dc$.

Néanmoins, cette diminution de la consommation permet un investissement plus élevé et donc une production plus élevée qui pourra être consacrée à la consommation en $t+1$: $dc\,(1+f'(k))$. La population augmentant au taux n pendant cette période, la consommation/tête en $t+1$ peut augmenter de :

$$\frac{dc \cdot (1+f'(k))}{1+n}.$$

Cette consommation supplémentaire implique alors une croissance d'utilité en $t+1$ (en valeur actualisée en t) de :

$$\frac{1}{1+\theta}\cdot u'(c_{t+1})\cdot\frac{dc\cdot(1+f'(k))}{1+n}.$$

Or, le long du sentier de consommation optimale, cette réallocation ne doit pas améliorer (ni détériorer) le bien–être globale :

$$\begin{aligned}
u'(c_t)\,dc &= \frac{1}{1+\theta}\cdot u'(c_{t+1})\cdot\frac{dc\cdot(1+f'(k))}{1+n}\\
&\Rightarrow u'(c_t) = \frac{1}{1+\theta}\cdot u'(c_{t+1})\cdot\frac{1+f'(k)}{1+n}\\
&\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{1+\theta}\cdot u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1+n}{1+f'(k)}\\
&\Leftrightarrow TMS_{t+1,t} = TMST_{t+1,t}
\end{aligned} \tag{D.20}$$

où les indices envoient aux dates des consommations.

Si le délais entre t et $t+1$ est suffisamment court, cette condition est équivalente à la condition $(D.19)$.

La règle de Keynes–Ramsey nous indique que la consommation *augmente – reste constante – diminue* selon que le produit marginal du capital (net de la croissance de la population) est *plus – autant – moins* élevé que le taux de préférence pour le présent.

Cela est assez intuitif : plus le produit marginal du capital est élevé par rapport au taux de préférence pour le présent, plus est-il intéressant de réduire la consommation présente pour profiter d'une consommation future plus élevée.

Si ce produit marginal est fort initialement, la consommation sera croissante dans le temps sur le sentier optimal. Le rôle de l'élasticité de substitution $(D.16)$apparaît à ce niveau : plus élevée est cette élasticité, plus facile il est de sacrifier la consommation présente pour profiter de la consommation future et donc, pour un niveau excédentaire du produit marginal (par rapport à la préférence pour le présent), plus fort est le taux de variation de la consommation.

D.5 La condition de transversalité

Une condition de transversalité indique le comportement que doit avoir la commande quand on arrive à l'horizon du programme (ici à l'infini) : la manière dont la commande doit *traverser* la ligne d'horizon.

Cette condition doit nous aider à choisir le sentier optimal parmi les sentiers possibles.

Dans notre cas cette condition est donnée par la contrainte $(D.16)$

$$\lim_{t\to\infty} k_t\cdot\left(\lambda_t\cdot e^{-\theta t}\right) = \lim_{t\to\infty} k_t\cdot\left(u'(c_t)\cdot e^{-\theta t}\right) = 0.$$

On peut comprendre mieux la signification de cette contrainte si l'on considère notre problème avec un horizon fini : T.

Dans ce cas, si $u'(c_T)\cdot e^{-\theta T}$ était positive, il serait sous-optimal de terminer avec un stock de capital positif car on pourrait améliorer le bien-être en consommant ce capital. Par conséquent, on

doit avoir sur le sentier optimal :

$$\begin{aligned} & k_T > 0 \text{ et } u'(c_T^*) \cdot e^{-\theta T} = 0 \\ & \quad \text{ou} \\ & k_T = 0 \text{ et } u'(c_T^*) \cdot e^{-\theta T} > 0 \\ & \quad \text{ou} \\ & k_T = 0 \text{ et } u'(c_T^*) \cdot e^{-\theta T} = 0 \end{aligned}$$

On peut condenser ces conditions en une seule :

$$k_T \cdot \left(u'(c_T) \cdot e^{-\theta T} \right) = 0.$$

La condition à horizon infini peut être vue comme étant la limite de cette condition quand T devient très grand.

$$\lim_{T \to \infty} k_T \cdot \left(u'(c_T) \cdot e^{-\theta T} \right) = 0.$$

D.6 SCE et dynamiques

Le sentier optimal est caractérisé par les équations :

$$\dot{k} = f(k) - c - nk, \quad (\leftarrow D.2) \tag{D.21}$$

$$\dot{c} = \frac{u'(c_t)}{u''(c_t)} \cdot \left(n - f'(k) + \theta \right), \ (\leftarrow D.18) \tag{D.22}$$

$$\lim_{t \to \infty} k_t \cdot \left(u'(c_t) \cdot e^{-\theta t} \right) = 0. \tag{D.23}$$

Sur le sentier de croissance équilibrée le capital/tête (k) et la consommation/tête (c) sont constants. Notons par k^* et c^* ces valeurs.

D.6.1 La règle d'or modifiée

A partir de $(D.22)$, avec $\dot{c} = 0$, nous obtenons la règle d'or modifiée :

$$f'(k^*) = n + \theta \Rightarrow k^* = f'^{-1}(n + \theta) \tag{D.24}$$

Le produit marginal du capital sur le SCE doit être égal à la somme du taux de préférence pour le présent et du taux de croissance de la population.

A partir de ce résultat et de $(D.21)$, nous pouvons calculer le niveau de c correspondant à k^* :

$$c^* = f(k^*) - nk^* \tag{D.25}$$

La règle d'or que nous connaissons correspond à $f'(k_{or}) = n$. Cela nous donne le stock de capital qui maximise la consommation/tête sur le SCE :

$$\begin{aligned} f'(k^*) = n + \theta > n = f'(k_{or}) \\ f'' < 0 \Rightarrow k^* < k_{or}, \\ f(k^*) < f(k_{or}), \ c^* < c_{or}. \end{aligned}$$

La condition modifiée $(D.24)$ implique que la consommation/tête soit réduit de son niveau de règle d'or d'un montant qui dépend de la préférence pour le présent.

Même si la famille pourrait consommer plus sur le SCE, du fait de l'impatience reflétée par θ, il n'est pas optimal, du fait de l'impatience reflétée par θ, de réduire la consommation présente dans le but d'atteindre le niveau plus élevé de la règle d'or.

Cette condition est très *puissante* car elle implique qu'en définitive, la productivité du capital, ainsi que le taux d'intérêt réel, sont déterminés par la préférence pour le présent et n : les goûts et la croissance démographique déterminent le taux d'intérêt réel $(\theta + n)$, et la technologie détermine alors le stock de capital et la consommation compatibles avec ce taux.

D.6.2 Dynamiques

Pour étudier la dynamique, nous allons utiliser un *diagramme de phase* dans le plan (k, c).

L'évolution dynamique de ce système est donnée par les équations $(D.21)$ et $(D.22)$:

$$\dot{k} = f(k) - c - nk, \qquad (\leftarrow D.2) \tag{D.26}$$

$$\dot{c} = \frac{u'(c_t)}{u''(c_t)} \cdot \left(n - f'(k) + \theta\right), \ (\leftarrow D.18) \tag{D.27}$$

Nous savons que :

$$\dot{c} = 0 \Rightarrow f'(k) = n + \theta \Rightarrow k = k^* \ (\text{constante}) \tag{D.28}$$

La courbe $\dot{c} = 0$ est donc une droite verticale donnée par $k = k^*$.

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow c = f(k) - nk \ \ (\text{fonction de } k).$$

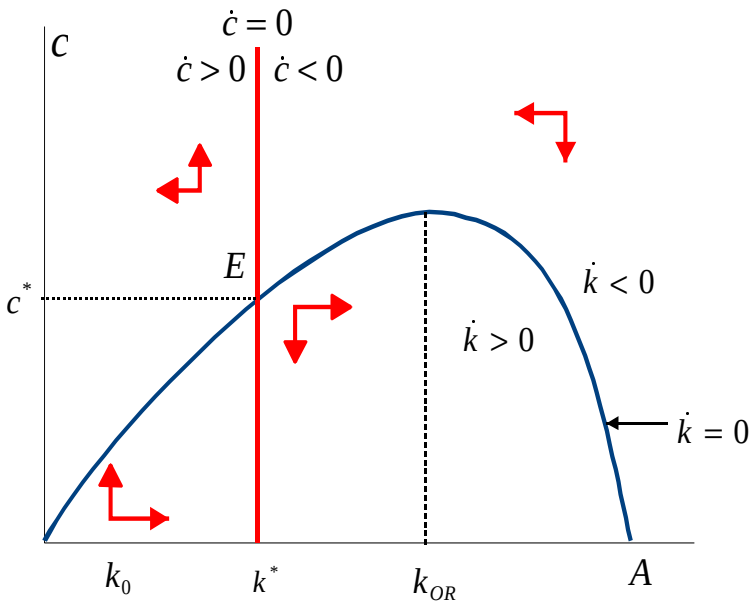
La courbe $\dot{k} = 0$ commence à l'origine. Elle coupe la droite $\dot{c} = 0$ en un point **E**, elle atteint son maximum en $k = k_{or}$ $(f'(k_{or}) = n)$ et décroît jusqu'à un point **A** où elle coupe l'axe des abscisses $(f(A) = n.A)$.

Nous savons de plus que :

– au dessus de la courbe $\dot{k} = 0$, $\dot{k} < 0$ et en dessous de cette courbe $\dot{k} > 0$.

– de même, à gauche de la droite $\dot{c} = 0$, $\dot{c} > 0$ et à droite, $\dot{c} < 0$.

A partir de ces observations, nous pouvons représenter l'évolution dynamique de l'économie dans un diagramme de phase.

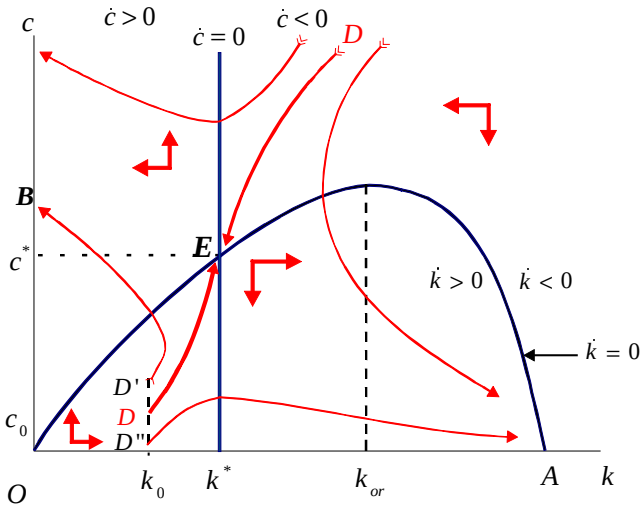


Remarque 1 : La dynamique

$$\begin{aligned}
&\dot{c} = 0 \Leftrightarrow f'(k^*) - n - \theta = 0 \\
&k < k^* \Rightarrow f'(k) > f'(k^*) = n + \theta \Rightarrow \dot{c}(k) > 0 \\
&\dot{k} = 0 \Leftrightarrow f(k^*) - c^* - nk^* = 0 \\
&c > c^* \Rightarrow \dot{k}(k^*, c) = f(k^*) - c - nk^* < 0
\end{aligned}$$

Remarque 2 : La règle d'or

$$\begin{gathered}
f'(k^*) = n + \theta > n = f'(k_{or}) \\
k^* < k_{or} \quad (car\ f'' < 0) \\
f(k^*) < f(k_{or}) \Rightarrow c^* < c_{or}
\end{gathered}$$



Il y a trois équilibres : l'origine O, le point E et le point A.

Sur toutes les trajectoires, soit la condition de Keynes–Ramsey, soit la condition de transversalité est violée, sauf sur DD. Sur cette branche on vérifie toutes les contraintes et on converge vers le sentier de croissance équilibrée : c'est la **branche stable**.

• Si l'économie démarre au dessus de D (point D'), elle converge, dans un temps fini, vers le point B où le stock de capital disparaît. L'économie doit alors passer à l'origine. Or un tel saut de c est exclu par l'équation dynamique de c.

• Si l'économie démarre en dessous de D (point D''), alors elle converge asymptotiquement vers A. Or une telle trajectoire viole la condition de transversalité.

Par conséquent, la solution du problème du planificateur central est parfaitement résumée par cette trajectoire.

Pour tout niveau du capital initial, k_0, il peut calculer un niveau optimal unique de la consommation de manière à placer l'économie sur cette trajectoire. L'économie converge alors de manière monotone vers (k^*, c^*). Il peut aussi calculer, au moment zéro, les niveaux de la consommation optimale et du stock de capital à tout moment dans le futur.

D.7 Économie décentralisée

Considérons maintenant une économie décentralisée avec deux marchés de facteurs : un pour le travail et un pour les services du capital.

Les services du travail sont loués au prix w_t (le salaire) et ceux du capital au prix r_t.

Il existe un marché des fonds prêtables sur lequel les familles peuvent s'endetter ou prêter de l'argent.

Il existe une multitude de familles identiques, chacune avec une fonction d'utilité identique à $(D.4)$.

Chaque famille doit décider à chaque point du temps

– la quantité de travail et de capital qu'elle propose aux entreprises et

– les montants qu'elle va consommer et épargner.

Elle peut épargner soit à travers l'accumulation du capital, soit en prêtant aux autres familles. Les familles sont indifférentes à la composition particulière de leur épargne. Par conséquent les deux rendements doivent être égaux : le taux d'intérêt sur la dette doit être égal au taux de location du capital.

Il existe une multitude de firmes identiques, chacune utilisant la même technologie $(D.1)$. Les entreprises louent les services du capital et du travail pour produire.

L'hypothèse des rendements constants fait que le nombre de firmes n'est pas important tant que les firmes ont un comportement concurrentiel de preneurs de prix (le salaire réel et le taux de location du capital).

Les familles et les entreprises font des prévisions parfaites : elles connaissent parfaitement les prix (w,r) présents et futurs et les prennent comme des données (anticipations rationnelles si incertitude).

Par conséquent, étant donnée une suite de prix

$$\{w_t, r_t\}, t = [0,\infty),$$

chaque famille doit maximiser à chaque point du temps

$$U_s = \int_s^\infty u(c_t)\, e^{-\theta(t-s)} dt$$

sous la contrainte budgétaire

$$c_t + \dot{a}_t + na_t = w_t + r_t a_t,\ \forall t, k_0 \text{ donnés} \tag{D.29}$$

où $a_t \equiv k_t - b_{pt}$ est la richesse de la famille donnée par le stock de capital détenu a_t net de la dette de la famille b_{pt}.

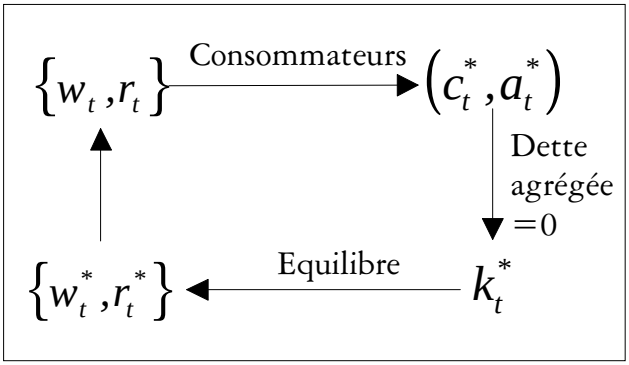
A chaque moment du temps, les offres de travail et de capital par les familles sont inélastiques. L'offre de capital est déterminée par les décisions d'investissement passées et l'offre de travail est déterminée par la population. La seule décision que la famille doit faire concerne donc l'arbitrage consommation/épargne.

Les firmes maximisent le profit à chaque moment du temps. Étant donnée leur technologie, représentée par la fonction de production $(D.1)$, les conditions de premier ordre impliquent :

$$f'(k_t) = r_t \tag{D.30}$$

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t \tag{D.31}$$

Considérons un sentier donné de salaires et de taux de location du capital.



Étudions l'établissement de cet équilibre.

D.7.1 Condition de Non-Ponzi

Jusqu'à maintenant on a posé aucune contrainte sur a. Si un consommateur peut s'endetter sans limite $(a < 0)$ au taux d'intérêt courant (r_t), il peut être tenté de s'engager à un enchaînement de dettes (*Ponzi Game)* : il peut emprunter $1F$ aujourd'hui pour financer la consommation présente et s'endetter de nouveau demain pour reconduire sa dette et payer les intérêts. Comme la dette n'est jamais payée en définitive, la consommation présente supplémentaire devient gratuite. En contrepartie, la dette de la famille augmente indéfiniment au taux r_t.

Ce type de situations aberrantes doit être éliminé des trajectoires d'équilibre : la dette ne doit pas exploser asymptotiquement

$$\lim_{t\to\infty} a_t \cdot e^{-\int_0^t (r_v - n)dv} \geq 0 \tag{D.32}$$

C'est la condition de non-Ponzi qui implique que la dette ne peut croître plus rapidement que r_t. Les familles ont en fait intérêt à saturer cette contrainte.

D.7.2 Équilibre décentralisé

Le programme de la famille est

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^\infty u(c_t) \cdot e^{-\theta t} \cdot dt$$
$$S.à. \quad \begin{cases} c_t + \dot{a}_t + na_t = w_t + r_t a_t \\ \lim_{t\to\infty} a_t \cdot e^{-\int_0^t (r_v - n)dv} = 0 \end{cases}$$

Si l'on construit un Hamiltonien et on en écrit les conditions nécessaires, nous obtenons :

$$\frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = \theta + n - r_{t,} \tag{D.33}$$
$$\lim_{t\to\infty} a_t \cdot e^{-\theta t} = 0 \tag{D.34}$$

Comme la dette agrégée doit être nulle à l'équilibre, nous devons aussi avoir $a_t = k_t$. Si l'on tient compte de ce résultat et on l'intégre aux conditions $(D.30 - D.31)$ sur les productivités marginales et les prix (w_t, r_t), on obtient à partir des équations $(D.29, D.32)$

$$c_t + \dot{k} + nk_t = f(k_t), \tag{D.35}$$
$$\frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = \theta + n - f'(k_t). \tag{D.36}$$

Les conditions $(D.34 - D.36)$ donnent le comportement dynamique de cette économie décentralisée. Elles sont identiques aux conditions $(D.19)$, $(D.2)$, et $(D.16)$ de l'économie centralisée. Les deux dynamiques optimales sont donc équivalentes (avec $f' = r$).

D.7.3 Le rôle des anticipations

Ces conditions n'expriment la dynamique que comme une fonction des valeurs instantanées des variables. Est-ce cela voudrait dire que les anticipations des agents ne jouent aucune rôle dans cette dynamique ?

La contrainte de budget intertemporelle $(D.29)$ montre clairement que la famille ne peut planifier ses décisions sans connaître la trajectoire des prix $\{r_t, w_t\}$. Ces anticipations sont donc essentielles à l'allocation des ressources dans l'économie décentralisée. Les conditions d'optimalité instantanées déterminent les taux de variation et non les niveaux des variables (notamment de la consommation).

Si les anticipations ne sont pas correctes (si elles ne sont pas des anticipations d'équilibre) alors la solution décentralisée diverge de la solution centralisée. L'évolution de l'économie décentralisée dépend alors de la manière dont les ménages forment et révisent leurs anticipations.

D.8 Comportement local autour du sentier d'équilibre

En utilisant le développement de Taylor, nous pouvons linéariser ce système autour du sentier d'équilibre (c^*, k^*). Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \phi(c,k)\\ \dot{k} &= \omega(c,k)\end{aligned}$$

Nous pouvons alors linéariser ce système autour de (c^*, k^*) en utilisant le développement de Taylor :

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \phi(c^*,k^*) + \phi_c(c^*,k^*)(c-c^*) + \phi_k(c^*,k^*)(k-k^*) + o_1\\ \dot{k} &= \omega(c^*,k^*) + \omega_c(c^*,k^*)(c-c^*) + \omega_k(c^*,k^*)(k-k^*) + o_2\end{aligned}$$

Si l'on est proche de (c^*, k^*), $o_1 \simeq 0$ et $o_2 \simeq 0$. De plus, par définition d'un SCE les premiers termes $\phi(c^*, k^*)$ et $\omega(c^*, k^*)$ sont aussi nuls. Ce système devient alors :

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \phi_c(c^*,k^*)(c-c^*) + \phi_k(c^*,k^*)(k-k^*)\\ \dot{k} &= \omega_c(c^*,k^*)(c-c^*) + \omega_k(c^*,k^*)(k-k^*)\\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\dot{c}\\ \dot{k}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\phi_c & \phi_k\\ \omega_c & \omega_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(c-c^*)\\ (k-k^*)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

un système d'équations différentielles linéaires.

Dans notre cas :

$$\begin{aligned}\phi(c,k) &= \sigma(c)\cdot c\cdot\left(f'(k) - \theta - n\right)\\ \omega(c,k) &= f(k) - c - nk\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_c(c^*,k^*) = 0, \quad \phi_k(c^*,k^*) &= -\left[-f''(k^*)c^*\right]\cdot\sigma(c^*) \equiv -\beta < 0\\ \omega_c = -1, \quad \omega_k(c^*,k^*) &= f'(k^*) - n\end{aligned}$$

$$\dot{c} = -\beta(k-k^*) \tag{D.37}$$

$$\dot{k} = \left(f'(k^*) - n\right)(k-k^*) - (c-c^*)$$

$$\dot{k} = \theta(k-k^*) - (c-c^*) \tag{D.38}$$

On peut étudier la solution de ce système en le réduisant en une seule équation de second degré en k :

$$\begin{aligned}\frac{d^2k}{dt^2} = \frac{d\dot{k}}{dt} &= \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\dot{k} + \frac{\partial \dot{k}}{\partial c}\dot{c} \\ &= \theta\dot{k} - \dot{c} \\ &= \theta\dot{k} + \beta\left(k - k^*\right) && \text{(D.39)} \\ &= \theta\dot{k} + \beta k - \beta k^* && \text{(D.40)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \ddot{k} - \theta\dot{k} - \beta k = -\beta k^*} \qquad \text{(D.41)}$$

Nous avons donc une équation différentielle de second degré non–homogène :

$$\boxed{\Leftrightarrow \ddot{k} - \theta\dot{k} - \beta k = -\beta k^*}$$

En utilisant la solution générale $k = Ae^{\lambda t} \neq 0$, la forme homogène de cette équation devient :

$$\begin{aligned}&\dot{k} = \lambda A e^{\lambda t}, \quad \ddot{k} = \lambda^2 A e^{\lambda t}, \\ &\Rightarrow \lambda^2 A e^{\lambda t} - \theta\left(\lambda A e^{\lambda t}\right) - \beta\left(A e^{\lambda t}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow A e^{\lambda t}\left(\lambda^2 - \theta\lambda - \beta\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \theta\lambda - \beta = 0.\end{aligned}$$

C'est l'équation caractéristique. Elle possède deux racines :

$$\begin{aligned}\Delta &= \theta^2 + 4\beta > 0 \\ \lambda' &= \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\beta}}{2} < 0 \\ \lambda'' &= \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\beta}}{2} > 0\end{aligned}$$

La solution générale de cette équation est donc :

$$k_t^g = A_1 \cdot e^{\lambda' t} + A_2 \cdot e^{\lambda'' t}$$

La solution particulière de l'équation $(D.41)$ peut être obtenue sous la forme d'une solution constante :

$$\begin{aligned}&k_t = \mu = Cste \Rightarrow \dot{k} = 0, \ \ddot{k} = 0 \\ &\quad \Rightarrow \mu k = \mu k^* \Leftrightarrow k_t^p = k^* \quad (\text{ c'est normal !})\end{aligned}$$

La solution complète est donc :

$$\begin{aligned}k_t &= k_t^g + k_t^p \\ &\Leftrightarrow k_t - k^* = A_1 \cdot e^{\lambda' t} + A_2 \cdot e^{\lambda'' t} && \text{(D.42)}\end{aligned}$$

En $t = 0$, k_0 est donné par l'histoire de l'économie et donc nous devons avoir :

$$k_0 - k^* = A_1 e^0 + A_2 e^0 = A_1 + A_2$$

De plus, comme λ'' est positive, $k-k^*$ ne convergera vers 0 $(\Leftrightarrow k \to k^*)$ que si et seulement si

$$A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = k_0 - k^*,$$

sinon le système explose. Par conséquent, nous devons avoir autour du SCE :

$$\boxed{\Rightarrow k_t = k^* + (k_0 - k^*)\, e^{\lambda' t}} \tag{D.43}$$

La vitesse de convergence du système est donnée par

$$|\lambda'| = \left| \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\beta}}{2} \right| \quad \text{avec} \quad \beta \equiv \left[-f''(k^*)\, c^* \right] \cdot \sigma(c^*)$$

Donc $|\lambda'|$ est croissant avec $f''(\cdot)$ et σ, il est décroissant en θ. Quand les consommateurs sont plus patients, ils acceptent de baisser la consommation au début du temps et l'accumulation se fait plus rapidement. D'où une convergence plus rapide de l'économie vers le SCE. Les variations de f'' et de θ influencent la vitesse de convergence mais aussi les caractéristiques du SCE (k^*, c^*).